UNIVERSIDAD DE CAMAGÜEY
Centro de Estudios de Ciencias de la Educación "Enrique José Varona"

UNIVERSIDAD APEC
Departamento de Matemática

PERFECCIONAMIENTO DE LA FORMACIÓN DE CONCEPTOS ALGEBRAICOS EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS CON EL EMPLEO DE LOS ASISTENTES MATEMÁTICOS

Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas

Autora: M.C. Ileana Miyar Fernández

Tutores: Dra. María de los A. Legañoa Ferrá
Dr. Ramón Blanco Sánchez

Santo Domingo
2009

UNIVERSIDAD DE CAMAGÜEY
Centro de Estudios de Ciencias de la Educación "Enrique José Varona"

UNIVERSIDAD APEC
Departamento de Matemática

PERFECCIONAMIENTO DE LA FORMACIÓN DE CONCEPTOS ALGEBRAICOS EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS CON EL EMPLEO DE LOS ASISTENTES MATEMÁTICOS

Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas

RESUMEN

Autora: M.C. Ileana Miyar Fernández

Tutores:
Dra. María de los A. Legañoa Ferrá
Universidad de Camagüey

Dr. Ramón Blanco Sánchez
Universidad de Camagüey

Santo Domingo
2009

INTRODUCCIÓN

El perfeccionamiento de la enseñanza en la República Dominicana desde hace algunos años se ha convertido en el centro de atención de la Secretaría de Estado de Educación y Cultura (SEEC), en correspondencia con la política educacional que ha trazado el estado dominicano (SEEC, 2008). El presidente de la República Dominicana Dr. Leonel Fernández expresó: "…la educación y el manejo de los conocimientos es la mejor arma para que los pueblos puedan lograr sus metas de desarrollo en estos nuevos tiempos". (Fernández, 2008).

Por otra parte, los resultados alcanzados por la República Dominicana en el "Primer Estudio Internacional Comparativo del Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación"(UNESCO, 1998), aplicado en el año 1997 en 11 países latinoamericanos, la situaban en uno de los últimos lugares entre los participantes. Recientemente la UNESCO en su informe "Educación para todos en el 2015. ¿Alcanzaremos la meta?", ubica nuevamente a República Dominicana en el lugar 14 de los 17 países de América Latina que participaron en el estudio, en cuanto a la posibilidad del cumplimiento de la meta del milenio de educación. (UNESCO, 2007), por lo que es imperioso atender estos resultados dado que repercuten en la educación superior.

La Secretaría de Estado de Educación Superior Ciencia y Tecnología (SEECYT) de la República Dominicana ha reconocido en un reciente informe[1] que la tasa de deserción estudiantil es en la actualidad de más de un 50%, debido entre otras causas, a los problemas que presentan los estudiantes en la formación precedente. En los retos o desafíos relativos a la oferta, la demanda y la transformación de las carreras que se reflejan en el citado informe, se expresa la necesidad de desarrollar programas propedéuticos para alcanzar mayores niveles de calidad en la educación superior y lograr resultados satisfactorios de formación académica.

La Universidad APEC, (UNAPEC) se ha propuesto alcanzar los máximos estándares de calidad como un reto del nuevo milenio. En aras de lograr este objetivo, ha realizado diversas acciones encaminadas a perfeccionar sus procesos sustantivos. Dentro de estas acciones desarrolló un análisis sobre la pedagogía del desempeño del docente en el área de Matemática, y decidió acometer la tarea de elevar

[1] Plan Decenal de Educación Superior 2008-2018, http:// www.seescyt.gov.do/plandecenal/

la calidad del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, creando el proyecto "Mejora de la Enseñanza de la Matemática" en cooperación con la Universidad de Camagüey, Cuba.

Unido a esto, la Universidad APEC llevó a cabo un proyecto de virtualización conocido como "UNAPEC Virtual", implementando para ello una política de capacitación de los profesores en las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) para promover su utilización en el proceso de enseñanza-aprendizaje. En ese orden de acciones creó un Centro de Apoyo a la Docencia (CADOC) con la finalidad de proporcionar los recursos tecnológicos y asesorías en la preparación de materiales didácticos para el uso de entonos virtuales de enseñanza-aprendizaje.

Enseñar Matemática es una problemática importante y actual en todos los países. El impacto de las TIC sobre la enseñanza en general y en particular sobre la Matemática, unido a la necesidad del empleo de esta ciencia para el desarrollo del pensamiento lógico, la capacidad de razonamiento y la comprensión dinámica y cambiante de la realidad objetiva, obligan a perfeccionar cada vez más los métodos y procedimientos de la enseñanza de la Matemática, de manera que se logre la formación de un egresado con una alta capacidad de adaptabilidad y habilidades para "aprender a aprender".

Los objetivos de la educación no se pueden lograr sólo con la utilización de los métodos explicativos e ilustrativos, los cuales no garantizan completamente la formación de las capacidades necesarias a los futuros profesionales en lo que respecta, fundamentalmente, a su independencia y a la solución creadora de los problemas no rutinarios y profesionales que se presenten. También se ha demostrado que en la enseñanza-aprendizaje de la Matemática estos métodos son insuficientes, es así como en los procesos de conceptualización y generalización teórica se requiere el desempeño por parte del estudiante de una actividad social reflexiva mediatizada por artefactos (Radford, 2006). Lo planteado anteriormente pone de manifiesto la importancia de la aplicación de nuevos métodos en escuelas y universidades, la cual constituye una de las vías para la erradicación de las deficiencias existentes en el proceso de enseñanza–aprendizaje de la Matemática. Una forma de lograr la renovación y modernización deseada es a través de la inclusión en los currículos de estudio del uso de las tecnologías como recursos para el aprendizaje.

En los últimos años se ha producido un fuerte movimiento dentro de la comunidad de profesores que utilizan los asistentes matemáticos en la enseñanza-aprendizaje de la Matemática, con el fin de cambiar los usos didácticos tradicionales de estas herramientas. En muchos casos el uso se reduce a utilizar la computadora como una calculadora potente de altas prestaciones, lo que representa claramente una subutilización de estos recursos, por lo que se hace necesario un cambio de punto de vista para optimizar las oportunidades que ofrecen las TIC y tratar de fomentar la creatividad matemática de los estudiantes (Ortega, 2002; Galán y otros, 2002a; Galán y otros, 2002b).

Diversos autores argumentan que se deben modificar dichos usos para maximizar las oportunidades que ofrecen estas tecnologías (García y otros, 2002), orientando su aplicación en el sentido de incidir positivamente en el aprendizaje (Dubinsky y Noss, 1996), aumentar considerablemente la posibilidad de experimentación (Hoya y otros, 2002) y permitir que el estudiante construya su conocimiento matemático bajo la orientación del profesor (Nava, 1998). De aquí se deriva la necesidad de profundizar en el uso adecuado de teorías psicológicas y pedagógicas, en la integración de las aplicaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje y en realizar trabajos encaminados a formular una metodología para la enseñanza sustentada en el empleo de las TIC.

La apropiación de los conceptos matemáticos por los estudiantes, es uno de los aspectos donde se manifiestan deficiencias notables y aunque se ha trabajado al respecto desde diferentes dimensiones estas deficiencias se mantienen en la actualidad. Por otra parte se aprecia en la literatura científica especializada, que dicha problemática ha sido tratada desde la perspectiva de la mediación semiótica mediante el uso de las TIC, sin embargo aún no se han resuelto los problemas relativos a la formación conceptual. (Godino, 2002; D'Amore,2001; Doerr, 2001, Arzarello y Robutti, 2004).

La mediación semiótica a través de registros de representación semiótica (RRS) y su contribución a la formación conceptual matemática ha sido ampliamente tratada en la literatura (Duval, 1988; Radford, 2004a; D'Amore, 2001; Godino y Batanero, 1999; Otte, 2003; Steinbring, 2005). Estos autores asumen que la construcción de los conceptos matemáticos depende estrechamente de la capacidad de usar más registros de representaciones semióticas de esos conceptos, esto significa representarlos en un registro dado, tratar tales representaciones en un mismo registro y de convertir tales representaciones de un registro dado a otro.

En la Matemática, específicamente en el Álgebra se deben utilizar las computadoras como herramienta didáctica para posibilitarle al estudiante utilizar diferentes registros de representación semiótica y de este modo materializar los conceptos, logrando una mejor apropiación de los mismos. (Santandreu, 2005; Darío y otros, 2007). Autores como Hillel y otros (1992); O'Callaghan, (1998); Burrill (2002) y Doerr, (2001) han realizado investigaciones sobre el uso de las computadoras para la materialización y reconversión semiótica a partir de las posibilidades que brindan los asistentes matemáticos para este fin. Además, las investigaciones han demostrado que las computadoras posibilitan realzar, enfatizar y alentar al estudiante a participar y a involucrarse con más libertad e independencia en su propio proceso de enseñanza-aprendizaje, en el que tendrá un rol activo. También propician la interactividad, despiertan la motivación y permiten, a su vez, una atención diferenciada a los estudiantes.

En relación con el proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra las investigaciones (Kieran, 2007, Bartlo (2007), Drijvers, 2003; Kindt, 2000; Gravemeijer y otros, 2000; Pozzi, 1994) revelan dificultades. Dentro de estas se pueden destacar el hecho de que los estudiantes cometen a menudo errores mientras ejecutan operaciones algebraicas, les resulta difícil detectarlos y corregirlos. Incluso estudiantes que son capaces de realizar procedimientos algebraicos específicos tienen un significado muy limitado de ellos, y cometen errores cuando se les cambia ligeramente la presentación del problema.

En este estudio son consideradas varias dificultades que se describen en la literatura relativas al proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra, como son:

- El nivel abstracto en el que se resuelven problemas, la no relación entre las situaciones concretas en que ellos se encuentran y la falta de significado que los estudiantes atribuyen a los objetos matemáticos en el nivel abstracto.
- La necesidad de determinar las operaciones algebraicas que son parte del proceso global de resolución de problemas.
- El lenguaje algebraico con sus convenciones específicas y símbolos.

- El carácter de objeto de las fórmulas algebraicas y las expresiones, donde los estudiantes a menudo los perciben como procesos o acciones.
- Los estudiantes presentan la limitación de asociar el concepto u objeto matemático a un solo registro de representación semiótica (RRS), por lo que sustituyen el concepto por una de sus representaciones.

En la Universidad APEC se presenta la problemática de que los estudiantes tienen dificultades con el aprendizaje del Álgebra básica que se imparte, corroborado a través del bajo porcentaje de estudiantes aprobados en la asignatura (35 %) y los errores operacionales en los que subyacen errores conceptuales detectados en la revisión de exámenes parciales y finales.

Para profundizar en dicha situación e indagar en sus posibles causas, se realizó un diagnóstico causal en estudiantes de las carreras de negocios, de la Universidad APEC, consistente en encuestas a estudiantes, la observación a clases, la revisión de exámenes, entrevistas a profesores, análisis de documentos y pruebas pedagógicas, todo lo cual puso en evidencia un conjunto de insuficiencias que permitieron corroborar las detectadas en el diagnóstico fáctico.

Las insuficiencias que presentan los estudiantes universitarios en la aplicación del Álgebra como herramienta de trabajo en la propia Matemática manifiestan la existencia de insuficiencias en el aprendizaje conceptual del Álgebra básica en la universidad, entre los que se pueden destacar:

- El dominio conceptual de la función, elemento fundamental del lenguaje matemático, que conduce a errores en la modelación de sistemas reales.
- El concepto de conjunto solución que conduce a errores en la utilización de las ecuaciones como herramientas matemáticas.
- El dominio conceptual de tecnicismos algebraicos en la resolución de las ecuaciones conduce a obtener soluciones extrañas o perder soluciones en la ecuación.
- El tecnicismo algebraico en el trabajo con desigualdades. El tratamiento de las desigualdades como igualdades, no precisan el concepto.

El diagnóstico causal apuntó a que una de las causas fundamentales de tales insuficiencias estaba en que el proceso de enseñanza-aprendizaje no contribuye a la correcta formación de los conceptos del

Álgebra básica, dada por la limitada consolidación del nexo símbolo-objeto matemático debido a las insuficiencias existentes en la materialización de los conceptos.

A tenor con todo lo antes expuesto se puede decir que se aprecia como **problema científico** las insuficiencias que presentan los estudiantes universitarios en la utilización del Álgebra básica como herramienta de trabajo en aplicaciones matemáticas.

Es por ello que se declara como **objeto de la investigación** el proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra básica en la educación superior.

De acuerdo a lo planteado, esta investigación se propone como **objetivo** elaborar una metodología sustentada en un modelo semiótico informático que contribuya al perfeccionamiento de la formación de conceptos algebraicos en estudiantes universitarios.

Se reconoce como **campo de acción** de la investigación la formación conceptual en los estudiantes con el empleo de las TIC.

Para dar solución al problema, esta investigación se plantea la siguiente **hipótesis:** "Si se aplica una metodología basada en un modelo semiótico informático que tome en cuenta la contradicción existente entre el **objeto algebraico** y la **multiplicidad de representaciones semióticas que sirven para revelar el conjunto de rasgos esenciales que lo caracterizan**, puede contribuirse a perfeccionar la formación de los conceptos algebraicos en los estudiantes y por ende, a su empleo en actividades matemáticas".

Conforme con el objetivo y la hipótesis de la investigación se realizaron las siguientes **tareas científicas:**

1. Caracterizar el proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra básica en la educación superior.
2. Establecer la base teórica que permite sustentar la mediación semiótica con el empleo las Tecnologías de la Información y la Comunicación en la formación de los conceptos algebraicos.
3. Caracterizar el estado actual del proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra básica en la Universidad APEC con énfasis en la formación conceptual.
4. Elaborar el modelo semiótico informático para el perfeccionamiento de la formación de conceptos algebraicos en estudiantes universitarios.
5. Diseñar las etapas de la metodología sustentada en el modelo semiótico informático propuesto.

6. Corroborar el valor científico metodológico de los principales resultados investigativos a través del método de criterio de expertos.
7. Determinar la efectividad preliminar de la metodología a través de un pre-experimento pedagógico en la asignatura Álgebra Universitaria de la Universidad APEC.

En el desarrollo de la investigación se desarrollaron métodos y técnicas orientados a:

Teóricos:

- El método histórico–lógico, particularmente en la evolución del lenguaje algebraico.
- El método de análisis–síntesis, el cual se emplea en todos los momentos del trabajo pero en particular para la caracterización epistemológica de la materialización de los conceptos matemáticos del Álgebra con el empleo las TIC, así como también, para la caracterización del objeto y el campo de acción de la investigación.
- El método sistémico estructural funcional en la modelación del proceso de formación conceptual en los estudiantes en el Álgebra básica así como en la metodología que instrumenta este modelo.

Empíricos:

- Para el diagnóstico y determinación del problema se utilizaron el análisis de documentos en la comparación de los programas de Álgebra y resultados académicos reportados por el departamento de Matemática; la observación de clases para caracterizar la actividad de los profesores y estudiantes; encuestas para obtener opinión de los estudiantes en relación a los métodos y recursos que se emplean en la enseñanza del Álgebra Universitaria; pruebas pedagógicas para evaluar la formación conceptual de los estudiantes; análisis del producto de la actividad, en la revisión de los exámenes de los estudiantes y entrevistas a profesores para conocer el trabajo metodológico que se lleva a cabo en la asignatura Álgebra Universitaria.
- Para la valoración de los resultados científicos alcanzados se utilizó el método de criterio de expertos y el pre-experimento pedagógico formativo.

Además, fueron utilizados algunos métodos y procedimientos propios de la estadística descriptiva en lo relativo al diseño de tablas, así como en el método de expertos.

El **aporte teórico** de la investigación está dado en un modelo semiótico informático para el perfeccionamiento de la formación de conceptos algebraicos en estudiantes universitarios, y el **aporte práctico** lo constituye la metodología que hace viable el perfeccionamiento conceptual en los estudiantes con el empleo de los asistentes matemáticos, propiciando un mejor desempeño en la utilización del Álgebra básica como herramienta de trabajo en aplicaciones matemáticas.

La **novedad** de la tesis está en revelar la lógica didáctica del perfeccionamiento conceptual a través de la consolidación del nexo símbolo-objeto matemático y la generalización teórica, tomando como base la síntesis entre la mediación semiótica y la interpretación del carácter singular-general del objeto algebraico, así como de las relaciones dialécticas objeto-proceso y variable-parámetro, con el empleo de los asistentes matemáticos.

La tesis está organizada conforme a la siguiente estructura: introducción, tres capítulos, conclusiones parciales y generales, conclusiones, recomendaciones, citas y referencias, bibliografía y anexos.

En el **primer capítulo** se realiza un análisis histórico de la evolución del lenguaje algebraico y la caracterización epistemológica-didáctica del objeto de investigación: el proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra básica en la Educación Superior. Se realiza la caracterización psicodidáctica de la mediación semiótica en la formación de conceptos algebraicos con el empleo de los asistentes matemáticos y se ofrece una valoración crítica del problema de la investigación, que destaca sus manifestaciones y posibles causas. En el **segundo capítulo** se explica y fundamenta el modelo semiótico informático para el perfeccionamiento de la formación de conceptos algebraicos en estudiantes universitarios. Del modelo elaborado se derivan relaciones que permiten elaborar la metodología para el perfeccionamiento de la formación conceptual en los estudiantes en el Álgebra básica. En el **tercer capítulo** se procede a la aplicación del método de criterio de expertos para corroborar el valor científico-metodológico del modelo semiótico informático y la metodología propuesta. Además se exponen los resultados de la realización de un pre-experimento pedagógico formativo en el Álgebra Universitaria a través del cual se implementó la metodología, donde se determinó la efectividad preliminar de la misma.

Las conclusiones parciales y generales a las cuales ha permitido arribar dicha investigación, dan cuenta de los principales resultados obtenidos, los cuales permiten corroborar el cumplimiento del objetivo y tareas planteadas. Las recomendaciones de la tesis presentan diversos aspectos vinculados al objeto de estudio los cuales, en consideración de la investigadora, deben constituirse en elementos de exploración no abordados y que por su importancia deben desarrollarse en próximas investigaciones.

Capítulo I. Marco teórico contextual del proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra básica en la educación superior.

En el capítulo se realiza una caracterización epistemológica-didáctica del proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra básica en la educación superior, así como también una caracterización psicodidáctica de la mediación semiótica en la formación de conceptos algebraicos con el empleo de los asistentes matemáticos. Se ofrece una valoración crítica del problema de la investigación, que destaca sus manifestaciones y posibles causas. Además se realiza un nuevo diagnóstico, lo cual, junto con la caracterización didáctica del objeto, es punto de partida para el establecimiento de la idea que rige esta investigación.

La caracterización del proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra básica en la educación superior arrojó como resultados lo siguientes:

- El Álgebra es una parte de la disciplina Matemática, que se clasifica según su contenido en Álgebra Clásica y Álgebra Moderna; y según el nivel educativo donde se imparte en Álgebra básica y Álgebra superior. En la primera se enseña el Álgebra Clásica y en República Dominicana se comienza a estudiar en octavo grado donde se dan nociones generales, completándose su impartición en el primero de bachillerato. Tal y como afirma Kaput (2000) la no integración del pensamiento algebraico y su razonamiento a los cursos de Matemática desde edades tempranas provoca que el Álgebra sea considerada como el elemento curricular más problemático de las matemáticas escolares en la actualidad, factor que provoca insuficiencias en su aprendizaje en la enseñanza media. Esta problemática repercute en la educación superior, provocando deficiencias en la formación de base de los estudiantes. De ahí que en la enseñanza superior dominicana se impartan cursos propedéuticos de Álgebra básica para preparar a los estudiantes con vista a los cursos de Matemática que van a recibir en este nivel.

- En la enseñanza del Álgebra tiene importancia no sólo la enseñanza de los conceptos sino también el lenguaje utilizado para expresar los mismos. Se distinguen tres fases de la evolución del desarrollo del lenguaje del Álgebra: Retórica, Sincopada y Simbólica; destacándose en esta última la importancia de la transformación ocurrida con la aparición de las computadoras, de manera que tal y como expresa (Bautista, 1994), el desarrollo del pensamiento algebraico se ha potenciado por la aparición de los nuevos sistemas de representación propios de las nuevas tecnologías. Por tanto la autora considera necesario el símbolo en el lenguaje matemático, en particular porque los objetos matemáticos se tratan a nivel conceptual, lo que hace imprescindible disponer de una materialización del pensamiento para estudiar los mismos.
- Las diferentes dificultades que se presentan en el proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra, reflejan la existencia de un conjunto de contradicciones que emanan de su comprensión, dentro de las cuales la autora destaca como las más significativas: la informal-formal, la concreto-abstracto, la singular-general, la variable-parámetro y la objeto-proceso. Pero dentro de ellas para la formación conceptual del Álgebra son fundamentales las relaciones dialécticas que se dan en las tres últimos tipos, dado que el pensamiento algebraico supone la representación de modelos, las relaciones entre variables y su generalización teórica.
- La enseñanza del Álgebra está enmarcada principalmente en dos tendencias pedagógicas: la constructivista y el Enfoque Histórico-Cultural, siendo esta última a la que se afilia la autora.
- Dentro de los diversos enfoques que se distinguen en la bibliografía para el proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra resultan los más comunes: el de solución del problema, el enfoque funcional, el enfoque por generalización, patrones y estructura, el enfoque del lenguaje y el enfoque histórico. Sin embargo, la autora considera que ellos no pueden utilizarse separados en la práctica educativa, porque una situación problémica frecuentemente provoca actividades algebraicas desde los diferentes enfoques. Por consiguiente, la necesidad de perfeccionar la formación de conceptos matemáticos en la enseñanza-aprendizaje del Álgebra se impone, a partir de un enfoque integrado desde una concepción histórico-cultural que tome en cuenta las relaciones

dialécticas de las contradicciones principales: carácter objeto-proceso, variable-parámetro y carácter singular-general del objeto algebraico.

En cuanto a la caracterización desde el punto de vista sicológico del proceso de formación de conceptos matemáticos a nivel universitario, la autora critica las concepciones de Piaget y neo-piagetianas y destaca la importancia del símbolo en el desarrollo intelectual del hombre, y concluye la necesidad de la consolidación del nexo símbolo-objeto si se aspira a desarrollar el proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra desde una perspectiva conceptual. Así mismo asume una posición vigotskiana y reconoce el papel de la generalización según Davidov en este proceso.

Desde la perspectiva didáctica la autora comparte las concepciones vigotskianas en lo relativo a que la transición de complejos a conceptos se hace posible por el uso de pseudoconceptos y considera además que el proceso de enseñanza-aprendizaje debe dirigirse a un uso apropiado del concepto junto con las intervenciones sociales, para provocar que el pseudoconcepto sea trasformado en concepto científico. También asume otro aspecto abordado en los estudios sobre el Enfoque Histórico-Cultural en la enseñanza de la formación de conceptos y es el relacionado con la semiótica.

La autora acepta la necesidad de utilizar múltiples formas de representación semiótica (a los que Duval denominó registros de representaciones semióticas (RRS)) y la transferencia entre estos registros para la enseñanza de la formación de los conceptos algebraicos, así como los errores que se provocan en la enseñanza de los conceptos cuando se trabajan estos desde un solo modo de representación y por eso considera importante enseñar los procesos de conversión entre registros. De D'Amore y otros autores concuerda en cuanto al significado de un término o expresión desde un punto de vista pragmático, el uso de diferentes registros semióticos permitirán al individuo la mejor comprensión del objeto.

De la consolidación del nexo símbolo-objeto, se considera por parte de la autora que se requiere, además de que el estudiante trabaje con el objeto representado por diferentes símbolos, que sea capaz de identificar el objeto en sus diferentes semióticas, así como expresar el objeto a través de diferentes símbolos, destacando el papel fundamental que juega en la consolidación de este nexo (Blanco, 2007) la codificación y decodificación de diferentes representaciones semióticas de los objetos matemáticos. Bajo esta perspectiva, coincide con Blanco en que, una de las actividades fundamentales de los profesores es enfrentar los estudiantes, a problemas en los cuales, para poder resolverlos, necesitan realizar conversiones entre distintos registros.

Como resultado del estudio realizado la autora considera que para lograr la formación conceptual y el desarrollo de la generalización teórica del estudiante en el proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra, se hace necesario desarrollar la actividad del estudiante en interacción social mediada por instrumentos semióticos orientada a la consolidación del nexo símbolo-objeto a través de la materialización y recodificación semiótica. Además, dado el carácter histórico del aprendizaje del estudiante se hace necesario tener en cuenta los preconceptos con los que arriba a la universidad y en qué forma estos preconceptos evolucionan en conceptos científicos.

En cuanto al análisis del empleo de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en el aprendizaje de la Matemática en general, y del Álgebra en particular, la autora considera que ellas pueden ayudar a generar una amplia escala de ejemplos y contra-ejemplos que les proporcionan a los estudiantes las oportunidades de reunir información para elaborar la organización de los conocimientos en base a esas experiencias.

Coincide con diversos autores en que dentro de las ventajas que proporcionan las mismas a este proceso está el empleo de contextos realistas, la aplicación del método científico a las situaciones problémicas, materialización e integración de diferentes representaciones semióticas, la experiencia de dinámicas con una situación problémica, una forma flexible de hacer Matemática y la facilitación en la creación de ambientes de aprendizaje interactivos.

Así mismo reconoce que en el caso particular del Álgebra la materialización semiótica se relaciona con la elaboración y manipulación de gráficas; que en entornos tecnológicos esto se puede hacer de forma rápida, flexible y dinámica; que estos ofrecen oportunidades para hacer transferencias entre diferentes registros semióticos de una relación, y en particular, para vincular entre sí representaciones gráficas y algebraicas; y por último, que estas transferencias pueden estimular la percepción de los diferentes registros semióticos como diferentes visiones de un mismo objeto matemático, y pueden vincular las propiedades visuales y algebraicas de la función estudiada.

Concretamente en cuanto a las asistentes matemáticos, casi todos los autores coinciden en que ellos contribuyen al aprendizaje del Álgebra, al desarrollo de estrategias de solución de problemas y a la formación de conceptos matemáticos.

Para la caracterización del estado actual del proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra básica en la Universidad APEC con énfasis en la formación conceptual se realizó un diagnóstico en dicha asignatura en el cuatrimestre enero-abril del 2008 que tuvo en cuenta los siguientes indicadores:

- Métodos y recursos empleados, (dentro de estos el empleo de las TIC en la mediación semiótica).
- Carácter de la participación y productividad de los estudiantes en clases.
- El dominio de conceptos esenciales y registros de representación semiótica utilizados.

Para ello se utilizaron técnicas como encuestas a estudiantes y entrevistas a profesores, análisis del producto de la actividad (revisión de exámenes), prueba pedagógica sobre conceptos de Álgebra, unido a la observación del proceso, revelando datos interesantes que demuestran las insuficiencias presentes en el proceso de formación conceptual en los estudiantes. Estos elementos fueron enriquecidos, a su vez, con el análisis documental de la tesis de maestría de la autora y los resultados que reporta el departamento de Matemática cuatrimestralmente sobre la asignatura objeto de estudio.

El diagnóstico arrojó que: existe un papel protagónico por parte del profesor, los métodos que prevalecen son expositivos con poco uso de medios audiovisuales, así como de otros recursos, lo que provoca una insuficiente materialización de los conceptos. Los estudiantes se caracterizan por ser pasivos, reproductivos y muestran muchas dificultades en la solución de problemas nuevos; los mismos confunden el concepto matemático con un tipo de representación semiótica; se observa un divorcio entre el registro algebraico y el gráfico, privilegiándose el algebraico, lo que demuestra un débil nexo símbolo-objeto, y además tienen deficiencias en las operaciones algebraicas debido a errores conceptuales.

Lo anterior corroboró las insuficiencias que existen en la utilización del Álgebra como herramienta en aplicaciones matemáticas que develan una insuficiente formación conceptual a partir de un limitado nexo símbolo-objeto.

Capítulo II: Modelo semiótico informático y metodología para el perfeccionamiento de la formación de conceptos algebraicos en estudiantes universitarios

En este capítulo se explica y fundamenta el modelo semiótico informático para el perfeccionamiento de la formación de conceptos algebraicos en estudiantes universitarios. Del modelo elaborado se derivan relaciones que permiten elaborar la metodología la cual tiene como características esenciales la independencia del concepto de una representación semiótica particular y las relaciones dialécticas que se manifiestan en el trabajo algebraico.

Para el perfeccionamiento de la formación conceptual se requiere superar la contradicción externa que se da entre, las exigencias en el desempeño profesional relacionadas con el empleo del Álgebra básica como herramienta de la Matemática y la apropiación de conceptos algebraicos. Esta contradicción se encuentra relacionada con otra contradicción, que se da en el proceso de formación conceptual, y que es inherente al concepto matemático. El concepto matemático siempre hace referencia a un objeto que no existe como objeto real, dado que los objetos matemáticos nunca son accesibles por la percepción. Por ende la designación de los objetos matemáticos pasa necesariamente por un registro semiótico de representación. Sin embargo, cada representación semiótica pone de relieve diferentes aspectos del objeto que representa, por lo que es necesario que el estudiante utilice diferentes representaciones para la formación del concepto y realizar la conversión entre estas representaciones.

La conceptualización, como actividad cognitiva del aprendizaje matemático, requiere de la utilización de múltiples registros de representación. A su vez es imprescindible distinguir entre el objeto matemático y su representación semiótica, dado que toda confusión entre el objeto y su representación provoca una conceptualización inadecuada, limitando el uso del mismo como herramienta matemática. El objeto matemático y la multiplicidad de representaciones semióticas que sirven para revelar el conjunto de rasgos esenciales que lo caracterizan, constituyen una expresión de la contradicción dialéctica entre esencia y fenómeno.

El modelo semiótico informático que se propone contribuye a superar las contradicciones que se originan en el proceso de formación conceptual en los estudiantes en el Álgebra básica en la educación superior. Está dinamizado por la interrelación que se da entre la contradicción externa y la interna, las cuales en su unidad, constituyen la fuente de desarrollo del proceso.

Los presupuestos teóricos que fundamentan la concepción del modelo semiótico informático que se propone toman como punto de partida el enfoque sistémico estructural funcional y como sustento psicológico el Enfoque Histórico-Cultural de Vigotsky y sus seguidores. En el orden didáctico se toma, como punto de partida que la actividad matemática es esencialmente una actividad mediada, con los símbolos como mediadores semióticos (Duval, Radford, D'Amore), la cual se lleva a cabo al establecer el nexo entre el concepto matemático y su representación semiótica. Se asumen las concepciones de Blanco en cuanto al rol que ocupa la relación símbolo-objeto en la formación conceptual y en relación al significado del símbolo algebraico se asume la formulada por Drijvers en relación a parámetros y variables. Relativo al uso de los asistentes matemáticos en la enseñanza del Álgebra se asumen las de Pea en relación a las funciones amplificadora, generalizadoras y organizadoras, así como las funciones que expresa Burril relativas a la materialización e integración de diferentes representaciones semióticas y los planteamientos de Doerr relativos a las transferencias entre diferentes registros semióticos.

Las ideas básicas que sustentan el modelo derivadas de los referentes son:

- Del carácter esencial de la actividad práctica con herramientas semióticas para la conceptualización. La construcción del conocimiento se realiza desde la actividad práctica, donde la actividad psíquica sólo es posible a través de los mediadores semióticos.
- De la formación del nexo símbolo-objeto. El carácter conceptual de los objetos matemáticos determina la necesidad de su representación a nivel simbólico.
- De la recodificación semiótica del nexo símbolo-objeto. Se reconoce que el sujeto consolida el nexo símbolo-objeto e independiza el objeto de su representación semiótica cuando es capaz de

representar el mismo objeto en diferentes registros de representación semiótica y hacer transferencias entre los diferentes registros de representación semiótica.

- De **la relación dialéctica variable–parámetro.** En el trabajo algebraico se requiere que el símbolo sea capaz de representar tanto una variable como un parámetro, lo cual se manifiesta de esta manera por la relación dialéctica variable-parámetro que existe en el Álgebra.
- De **la relación dialéctica proceso–objeto.** La aplicación del modelo pone de manifiesto la relación dialéctica proceso–objeto que se requiere dominar para realizar un trabajo algebraico eficiente.
- De **las potencialidades de los asistentes matemáticos para la formación conceptual.** Constituyen herramientas mediadoras en los procesos de consolidación del nexo símbolo-objeto, así como contribuyen a interpretar las relaciones esenciales del Álgebra al realzan el carácter singular-general del objeto algebraico, contribuir a la generalización y a visualizar de forma dinámica los roles de las variables y los parámetros en las expresiones algebraicas.

Los principales subsistemas que caracterizan **el modelo semiótico informático** son: **elicitación de los preconceptos, apropiación-generalización de los conceptos y aplicación de los conceptos.**

Primer subsistema: Elicitación de los preconceptos. La elicitación es el proceso de poner de manifiesto los preconceptos de los estudiantes, el que es imprescindible para promover el perfeccionamiento de la formación conceptual. La función del subsistema es develar los preconceptos para promover la motivación intrínseca hacia el concepto teórico. Los estudiantes en la enseñanza precedente utilizan los conceptos sin haberlos formado correctamente, generalmente identificando el concepto con una representación semiótica particular, lo que los lleva a la formación de pseudoconceptos. En este proceso se enfrenta el estudiante con el concepto científico, para promover el paso del pseudoconcepto al concepto científico.

La elicitación se produce a partir de la actividad matemática que los estudiantes realizan a través del empleo de los asistentes matemáticos. La identificación de los rasgos esenciales de los conceptos científicos en la representación en los diferentes registros semióticos y la concientización de los rasgos atribuidos por los estudiantes a los pseudoconceptos, constituyen los dos componentes internos esenciales del subsistema.

Segundo subsistema: Apropiación–generalización del concepto algebraico. La formación de conceptos algebraicos es una actividad intelectual dinámica e iterativa que se da en el curso de complejas operaciones en la actividad matemática y su resultado se va perfeccionando a través de la misma. Para su consecución se aborda desde una posición epistemológica y ontológica. En la **posición epistemológica** se precisa la manera en que estos objetos pueden llegar a ser apropiados, mientras que la posición ontológica consiste en precisar la naturaleza de los objetos algebraicos. La síntesis entre estas dos posiciones es la génesis del perfeccionamiento de la formación conceptual. La función del subsistema es lograr la apropiación del concepto y su generalización teórica a partir de la actividad estructurada racionalmente con el empleo de los asistentes matemáticos.

La **posición epistemológica** se fundamenta en que la formación conceptual se desarrolla a través de los procesos de **internalización** y **generalización teórica**, los cuales se encuentran estrechamente vinculados. Estos procesos se dan en el plano interno mediado y materializado por el símbolo, pero requieren desarrollarse de forma consciente e intencionada. Los mismos se viabilizan con el empleo de los asistentes matemáticos, los cuales son instrumentos de mediación por excelencia debido a que son herramientas que su uso proporciona sistemas de signos, que posibilitan fortalecer el nexo símbolo-objeto. Para que se produzca la generalización teórica y la internalización del concepto matemático científico es preciso que el estudiante desarrolle una actividad matemática en el plano externo en interacción social, mediada y materializada por los signos, los cuales posibilitan la representación de los conceptos a través de diferentes registros que se pueden desarrollar con los asistentes matemáticos.

La **representación** del concepto en un registro semiótico posibilita al estudiante identificar determinadas características del objeto, las cuales son comprendidas al ser **tratadas** diferentes representaciones del concepto. Sin embargo, la representación de un objeto en un registro semiótico no siempre posibilita identificar todos los rasgos esenciales que lo caracterizan, dado que la representación semiótica de un concepto no es unívoca y es relativa al registro semiótico. La **materialización semiótica con los asistentes matemáticos** emerge entonces de la interacción que se da en la actividad matemática, entre la representación y el tratamiento de los conceptos en un mismo registro semiótico.

Para alcanzar la comprensión total del concepto se necesita desarrollar la conversión que lleva de una representación en un registro semiótico, a la representación en otros registros semióticos diferentes, lo que hace posible la elección de un registro en lugar de otro frente a cualquiera situación relativa al concepto. La conversión entre diferentes registros semióticos ocurre de manera más directa cuando ellos son congruentes, sin embargo este proceso no es evidente para la mayoría de los estudiantes debido al fenómeno de la no congruencia entre los registros de representación semiótica, constituyendo una de las principales causas de las insuficiencias en la formación conceptual.

Para perfeccionar la formación conceptual es necesario enseñar al estudiante a que aprenda a realizar conversiones entre registros semióticos, lo cual puede ser desarrollado a partir del empleo de los asistentes matemáticos, dado que posibilitan el desarrollo de coordinaciones progresivas entre variados sistemas semióticos de representación (algebraicos y gráficos). Los asistentes matemáticos posibilitan realizar un análisis semiótico comparativo progresivo entre las representaciones en distintos registros, al proporcionar un entorno informático que permite colocar dichas representaciones frente a frente y hacer una correspondencia entre unidad significante de la representación en el primer registro con la unidad significante del segundo.

La realización de una actividad matemática centrada en la representación del objeto en una diversidad de registros utilizando los asistentes matemáticos, la conversión entre registros algebraicos y gráficos, en la cual se comparan y hacen corresponder las unidades significantes del objeto algebraico expresadas en cada registro, la interpretación de sus conversiones mutuas, posibilita que el estudiante establezca la coordinación entre los registros semióticos, desarrollando así el proceso de recodificación semiótica. Este proceso actúa como dinamizador de la independencia del concepto de una representación semiótica, contribuyendo a la objetivación del concepto. Es importante destacar que este tipo de actividad matemática potencia el aprendizaje de los conceptos, dada su contribución a la interpretación a partir de movilizar las analogías presentes en cada forma de representación. La **recodificación semiótica** emerge entonces de la interacción que se da en la actividad matemática con los asistentes matemáticos entre la representación de la diversidad de registros semióticos, la comparación y correspondencia entre las unidades significantes del objeto representado y la interpretación de las conversiones mutuas entre los registros semióticos.

La actividad de decodificación de un registro semiótico particular para hacer la codificación en otro registro semiótico, determinando los atributos esenciales del objeto que se manifiestan en cada forma de representación, y la coordinación entre estos posibilita elaborar el concepto científico y comprender su carácter general, en cuanto se toma en cuenta una mayor compresión de los atributos esenciales. Esta elaboración posibilita articular y sintetizar estas propiedades del concepto, independizando esta construcción de un registro semiótico particular, lo que le confiere un mayor grado de abstracción.

La **mediación semiótica** emerge de la interacción que se da en la actividad matemática con los asistentes matemáticos entre la materialización semiótica y la recodificación semiótica. Además en ella se promueve la elicitación de los preconceptos, dado que los significados atribuidos a los conceptos por los estudiantes tienden a perdurar, por lo que es necesario atender al mismo durante todo el proceso de perfeccionamiento conceptual.

La mediación semiótica que ofrece la actividad matemática soportada por los asistentes matemáticos y la interacción social que en ella se da, contribuye a la **consolidación del nexo símbolo-objeto**. A través de este nexo se posibilita la identificación del concepto en diferentes registros semióticos y se promueve su independencia de un registro en particular.

Para lograr el perfeccionamiento de la formación conceptual algebraica en los estudiantes, hay que tomar en cuenta además que, en el caso particular de los objetos algebraicos, es necesario que los estudiantes se apropien de las relaciones dialécticas que superan las contradicciones fundamentales que emanan de la comprensión del Álgebra. Estas son: el carácter singular-general del objeto algebraico, la relación dialéctica variable-parámetro y la relación dialéctica objeto-proceso.

El carácter singular general del objeto algebraico. El objeto algebraico es singular respecto al objeto que representa en un problema particular; puede ser particular cuando represente un modelo con determinadas características, así mismo puede ser general pues representa otros objetos que lo tienen como modelo. Esta dualidad dialéctica no resulta inmediata para el estudiante, no obstante la interpretación adecuada de la misma es fundamental en la construcción y aplicación del conocimiento matemático. El empleo de los asistentes matemáticos resulta conveniente para favorecer la actividad matemática para interpretar el carácter singular general del objeto algebraico, dadas sus potencialidades amplificadoras, que posibilitan la generación de múltiples ejemplos de una situación dada.

La **relación dialéctica variable-parámetro** es otra manifestación de esta relación dual. El parámetro es un medio de generalización su uso hace explícito los diferentes roles que el símbolo puede jugar, por lo que finalmente el parámetro contribuye al uso del símbolo con un mayor grado de generalidad. El uso del parámetro permite generalizar lo que ya es general a una dimensión mayor. La generalización usando variables produce cambios sobre las relaciones aritméticas, la variación y generalización de los parámetros produce generalizaciones sobre las relaciones algebraicas. Como se puede apreciar "el carácter general del objeto algebraico" se amplía (se logra un meta nivel de generalización) cuando su semiótica está dada mediante variables y parámetros. Los asistentes matemáticos posibilitan la actividad matemática que propicia caracterizar las variables y parámetros, haciendo objetivas sus diferencias a través del estudio de múltiples ejemplos, que se pueden mostrar con inmediatez a partir de las acciones que realizan los estudiantes con los mismos.

La **relación dialéctica objeto-proceso** es otra relación esencial en el perfeccionamiento de la formación conceptual en los estudiantes. Se da en el hecho de que un concepto matemático generalmente tiene dos dimensiones: una como proceso operacional y otra como objeto matemático. Inicialmente, para el estudiante el aspecto operacional predomina sobre el objetal, por lo cual se requiere desarrollar en el estudiante la habilidad para cambiar de uno a otro (operacional-objetal) cada vez que sea necesario No se puede aspirar a un desarrollo conceptual de los estudiantes en los conceptos algebraicos, si no logran interpretar adecuadamente estas relaciones, por lo tanto la actividad matemática del estudiante se efectuará sobre los objetos algebraicos incluyendo acciones sobre dichas relaciones.

La realización de la actividad matemática del estudiante sobre los objetos algebraicos en la cual se utilizan los asistentes matemáticos para la mediación semiótica con la inclusión de acciones sobre las relaciones esenciales del conocimiento algebraico es un modo de alcanzar las generalizaciones teóricas e internalizar los conceptos algebraicos. En este subsistema se pueden significar como componentes a la mediación semiótica con los asistentes matemáticos y la interpretación de las relaciones esenciales del conocimiento algebraico.

Tercer subsistema: Aplicación de conceptos. El proceso de apropiación de un concepto debe realizarse inseparablemente unido con el proceso de su aplicación práctica. La función de este subsistema es propiciar el perfeccionamiento de la formación conceptual algebraica a través de su utilización práctica en la actividad matemática. Para ello es imprescindible que el estudiante desarrolle diferentes tipos de actividades matemáticas: de categorización, de sistematización y de aplicación en nuevos contextos a la par que está desarrollando el proceso de formación del concepto, ya que no es posible hablar de la apropiación del concepto si el sujeto no es capaz de utilizar el concepto en alguna aplicación.

La **categorización** es aquella actividad en la cual el estudiante categoriza, ante situaciones nuevas y no familiares, en ejemplos y no ejemplos del concepto, argumentando cada categorización a partir de los atributos esenciales. La **sistematización** es aquella actividad en la cual se manifiesta la conexión del concepto nuevo con otros conceptos algebraicos, posibilitando la comprensión del carácter sistémico de los conceptos, su interdependencia dentro de la red de conceptos del Álgebra, viabilizándole pasar de un concepto a otro, lo que les confiere mayor aplicabilidad a los mismos en la actividad matemática. La **aplicación del concepto en nuevos contextos** es la actividad matemática que se sustenta en que el uso de conceptos, en condiciones no similares a aquellas en que fue aprendido, permite comprenderlo y dominarlo más amplia y correctamente, a la par que le sirve para juzgar si lo ha dominado realmente.

En la aplicación de los conceptos se manifiesta también el proceso de elicitación de los preconceptos, debido a que el proceso de formación conceptual es muy complejo y los rasgos atribuidos por los estudiantes a los conceptos tienden a persistir en su actividad matemática.

En este subsistema se pueden denotar como componentes la categorización, la sistematización y la aplicación a nuevos contextos. La actividad matemática desarrollada en la aplicación de los conceptos está sobre las interrelaciones entre estos tres componentes.

Relaciones del modelo. Las relaciones del modelo emergen como consecuencia de la interacción entre los subsistemas, aunque algunas se manifiesten con mayor relevancia asociadas a un subsistema en particular. Del modelo antes expuesto, emergen las **relaciones siguientes**:

1. **La elicitación de los preconceptos como proceso recurrente en la formación conceptual.** En todo el proceso de formación conceptual al representar los objetos algebraicos en diferentes registros de representación semiótica mediante los asistentes matemáticos posibilita elicitar los preconceptos dados al identificar el objeto con una representación semiótica particular.
2. **El perfeccionamiento de la formación conceptual como resultado de la unidad dialéctica entre la apropiación-generalización y la aplicación de los conceptos.** El perfeccionamiento de la formación conceptual es un proceso dinámico y complejo, que se produce como consecuencia del desarrollo e interrelación de la generalización teórica, la apropiación y la aplicación de conceptos. Estos procesos transcurren a través de la mediación semiótica y la interpretación de las relaciones esenciales del conocimiento algebraico que logra con el empleo de los asistentes matemáticos, propiciando la consolidación del nexo símbolo-objeto.
3. **La independencia del concepto algebraico de una semiótica particular y su carácter generalizador emerge como resultado de la relación de interdependencia que se produce entre los subsistemas.** El sistema se manifiesta como un todo, donde las relaciones entre sus componentes están dadas por la función que realizan en el perfeccionamiento de la formación conceptual. Al producirse la elicitación de los preconceptos de los estudiantes, se produce la apertura al nuevo conocimiento, el cual se forma en la interrelación entre la apropiación-generalización y la aplicación de los conceptos, sustentados estos procesos en los asistentes matemáticos dadas las posibilidades que estos ofrecen como mediadores y generalizadores. Al realizar conversiones entre registros de representación semiótica del objeto con los asistentes matemáticos se pueden destacar las diferentes características del mismo, las cuales son integradas en el concepto que se objetiviza y se independiza así de un registro de representación semiótica particular. A su vez, el desarrollo de la actividad matemática sobre las relaciones fundamentales del Álgebra contribuye a la formación científica del objeto algebraico al asumir su carácter generalizador.

1. La elicitación de los preconceptos como proceso recurrente en la formación conceptual.
2. El perfeccionamiento de la formación conceptual como resultado de la unidad dialéctica entre la apropiación-generalización y la aplicación de los conceptos.
3. La independencia del concepto algebraico de una semiótica particular y su carácter generalizador emerge como resultado de la relación de interdependencia que se produce entre los subsistemas.

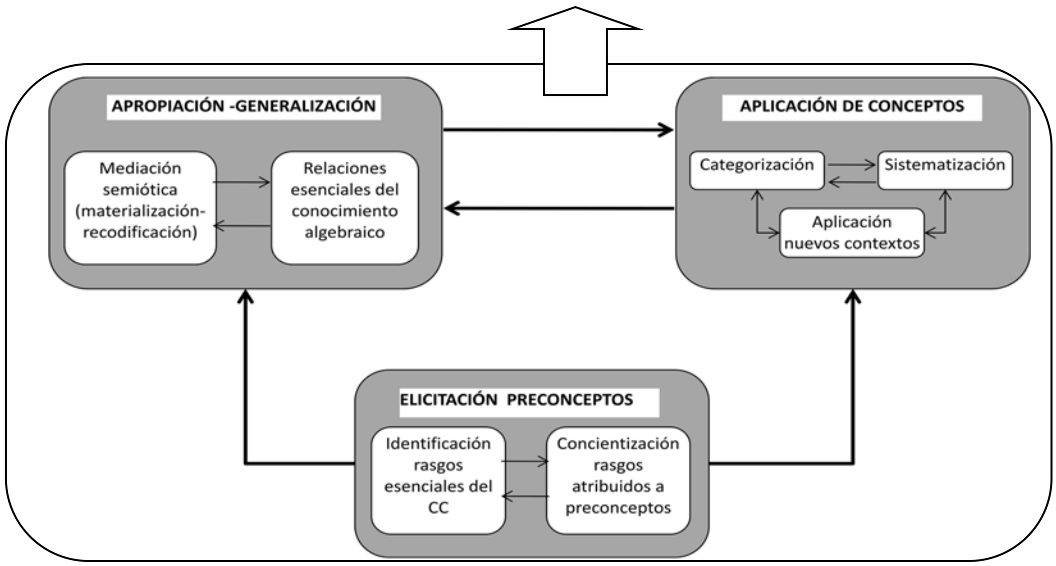


Figura 1: Representación del modelo semiótico informático

Las relaciones que se derivan del modelo semiótico informático determinan la lógica didáctica del perfeccionamiento de la formación conceptual, la que presupone la existencia de tres fases: elicitación de los preconceptos, apropiación-generalización y aplicación del concepto, las que son expresión de los procesos requeridos según el modelo para tal fin. El desarrollo de estas fases está contenido en la metodología que se propone, instrumentando su aplicación en el proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra básica.

La metodología que se presenta tiene el propósito de lograr el perfeccionamiento de la formación de conceptos algebraicos en estudiantes en los temas de Álgebra básica, que se imparten en cursos propedéuticos en la educación superior. Este perfeccionamiento está dirigido a que los estudiantes logren la independencia del concepto algebraico de una semiótica particular y se apropien del carácter generalizador del mismo. La autora considera que esta es una vía para contribuir a que los estudiantes apliquen de forma adecuada el Álgebra como herramienta de la Matemática. En tal sentido se propone una metodología que se sustenta en la consolidación del nexo símbolo-objeto y en la asunción de las relaciones fundamentales del Álgebra, para la formación del carácter generalizador del conocimiento algebraico, con el uso de los asistentes matemáticos. La metodología propuesta consta de: objetivo general, requerimientos para su implementación, características fundamentales y etapas.

Dentro de las características fundamentales se destaca que las tareas a realizar por los estudiantes se ejecutan siguiendo la lógica didáctica del perfeccionamiento de la formación conceptual que establece las fases de elicitación de preconceptos, apropiación-generalización y aplicación del concepto sustentada en la consolidación del nexo símbolo-objeto y en la asunción de las relaciones fundamentales del Álgebra para la formación del carácter generalizador del conocimiento algebraico, con el empleo de los asistentes matemáticos.

La metodología cuenta con el desarrollo de tres etapas: diagnóstico, planificación y ejecución. En la primera se realiza el diagnóstico de la formación conceptual de los estudiantes universitarios relativa al Álgebra básica, para la cual se aplica una prueba diagnóstica. En la segunda se planifican las tareas teniendo en cuenta las fases declaradas y los tipos de clase, en función de las dificultades y potencialidades detectadas, así mismo se planifica cómo y cuándo evaluar.

Atendiendo a las fases, los tipos de tareas son: en la fase de elicitación, tareas para elicitar el estado del conocimiento algebraico que poseen los estudiantes; en la fase de apropiación-generalización, tareas de materialización en diferentes registros semióticos, tareas de recodificación entre registros semióticos así como tareas de apropiación de las relaciones del Álgebra; y en la fase de aplicación de conceptos, tareas de categorización, sistematización y aplicación en nuevos contextos.

Las tareas de materialización y recodificación semiótica fusionan la representación, tratamiento y coordinación de registros semióticos. A partir de la representación y tratamiento de conceptos matemáticos se identifican rasgos esenciales de los conceptos estudiados. El análisis semiótico comparativo realizado con el asistente matemático entre la representación en el registro algebraico, con la representación en el registro gráfico posibilita la coordinación entre unidades significantes.

Como **tareas de apropiación de las relaciones del Álgebra** está la ilustración de la relación dialéctica variable-parámetro a través de la representación de familias de gráficos de curvas de distintos tipos, formulada a través de variables y parámetros:

Las **tareas de sistematización** posibilitan la comprensión del carácter sistémico de los conceptos y el análisis de su interdependencia dentro de la red de conceptos del Álgebra, al pasar de un concepto a otro lo que contribuye a su aplicabilidad en la actividad matemática. Un ejemplo de tarea es establecer la conexión entre las ecuaciones de segundo grado, los conceptos de variable-parámetro y las inecuaciones.

Las tareas de aplicación en nuevos contextos se realizan con el objetivo de evitar el trabajo reproductivo de los estudiantes y contribuir a la formación del concepto. Son importantes los ejercicios donde el estudiante tenga que considerar diferentes alternativas, como es el caso de los sistemas de ecuaciones con ecuaciones modulares.

Los tipos de clase donde se van a realizar las situaciones de aprendizaje se determinaron que fueran conferencias interactivas, talleres y clases prácticas. La **conferencia interactiva** tiene como objetivo que los estudiantes develen los preconceptos que poseen sobre los conceptos fundamentales de la unidad, a partir del reconocimiento de los rasgos esenciales de los conceptos científicos. Este proceso se da a través de la interacción entre las explicaciones del profesor, las tareas que desarrollan con los asistentes matemáticos y el diálogo entre los estudiantes. El **taller** tiene como objetivo la formación de los conceptos algebraicos a partir de la actividad matemática que los estudiantes realizan con los asistentes matemáticos interactuando entre sí. En este tipo de clase se promoverá entre los estudiantes, y entre estos y el profesor, la confrontación, discusión y colaboración al realizar **tareas de apropiación-generalización y de aplicación del concepto**, con el empleo de los asistentes matemáticos. Entre las tareas a desarrollar están las de materialización en diferentes registros semióticos, de recodificación entre registros semióticos, de apropiación de las relaciones del Álgebra, de categorización, de sistematización y de aplicación en nuevos contextos. Las **clases prácticas** tienen como objetivo que los estudiantes desarrollen habilidades operacionales algebraicas. Estas se desarrollarán con o sin el empleo de los asistentes matemáticos y en las mismas se promoverá la interacción social. Las actividades docentes se desarrollarán en condiciones que garanticen que los estudiantes puedan trabajar con el asistente matemático cuando así se requiera en pequeños grupos.

En la **etapa de ejecución** se concretará lo planificado, lo que implica tomar en cuenta la lógica didáctica del perfeccionamiento de la formación conceptual. La fase de elicitación se desarrollará durante la(s) conferencia(s) interactiva(s) de cada unidad. La metodología a emplear se sustenta en una participación activa de los estudiantes, en la misma se alternan breves presentaciones sobre contenidos con tareas de elicitación para revelar las dificultades comunes conceptuales. Los estudiantes deben resolverlas utilizando los asistentes matemáticos y para ello deben trabajar en pequeños grupos (2 a 3) para valorar las respuestas. Este método promueve la actividad intelectual del estudiante de forma continua durante la conferencia y proporciona retroalimentación continua al profesor y estudiantes del nivel de comprensión de los conceptos tratados.

Las fases de apropiación-generalización y de aplicación del concepto se llevarán a cabo en los talleres, desarrollándose las mismas de forma coordinada. Aquí los estudiantes enfrentarán tareas cuya solución requiere de la apropiación y aplicación de los conceptos. Se realizarán tareas de materialización y recodificación semiótica entre el lenguaje natural, el algebraico y el gráfico. Estas tareas se integrarán a las de aplicación, utilizando el asistente matemático para tratar los registros algebraicos y gráficos.

La metodología a emplear se sustenta en la realización de tareas en pequeños grupos, con el empleo de los asistentes matemáticos. El profesor orientará la actividad que se va a desarrollar en los talleres, la cual se estructurará en dos partes: en la primera los estudiantes realizarán las tareas con el empleo de los asistentes matemáticos y en la segunda se propiciará un debate sobre los conceptos tratados. Durante su ejecución el profesor intercambiará con los estudiantes, atendiendo a las dificultades derivadas de las insuficiencias de su formación conceptual. El mismo irá evaluando las tareas durante su realización de forma individual y por grupos. Al concluir los talleres realizará un resumen sobre los conceptos tratados y las características develadas que contribuyen al perfeccionamiento del concepto.

Capítulo III: Valoración de los resultados científicos alcanzados

En este capítulo se valoran los resultados obtenidos en la corroboración del valor científico-metodológico del modelo semiótico informático y la metodología propuesta a través de la aplicación del método de criterio de expertos y la realización de un pre-experimento pedagógico formativo en la asignatura Álgebra Universitaria que se imparte en la Universidad APEC.

La aplicación del método de criterio de expertos a 30 especialistas de diferentes países arrojó como resultados que los mismos consideran como muy adecuada:

- La influencia de la materialización con el empleo de las TIC para la consolidación del nexo símbolo-objeto matemático en el perfeccionamiento conceptual.
- La influencia de la transferencia entre registros semióticos para la generalización en el perfeccionamiento conceptual.
- La influencia de las relaciones dialécticas objeto-proceso, variable-parámetro y el carácter singular-general del objeto matemático en el aprendizaje conceptual del Álgebra.
- La planificación de los tipos de clases en correspondencia con las fases del proceso.
- La correspondencia entre los tipos de tareas y las fases del proceso.
- La contribución de la metodología a mejorar la efectividad de los estudiantes universitarios en el empleo del Álgebra como herramienta en aplicaciones matemáticas.

Así como que consideran adecuada la pertinencia del modelo semiótico informático que sustenta la metodología para el perfeccionamiento de los conceptos algebraicos de estudiantes universitarios con el empleo de los asistentes matemáticos y la correspondencia entre el modelo (concepción teórica) y la metodología (instrumento). Como resultado de la aplicación de la encuesta a expertos también se obtuvieron una serie de recomendaciones y criterios que permitieron perfeccionar los resultados de la investigación.

La comprobación parcial de la efectividad de la metodología se concretó en la asignatura Álgebra Universitaria en el cuatrimestre mayo–agosto del 2008 en un grupo de 36 estudiantes de las carreras de negocios. Esta comprobación parcial constituyó un pre-experimento dado que se llevó a cabo en un solo grupo. Se seleccionó la unidad I “Funciones y ecuaciones algebraicas lineales”.

Como primera actividad se impartió una clase “mixta” en la cual se aplicó una prueba diagnóstica y se dieron las orientaciones generales a los estudiantes sobre el uso del Derive.

En la conferencia interactiva se desarrollaron tareas de elicitación de los preconceptos utilizando para ello diferentes registros, (literal, algebraico, gráfico, etc.) con el empleo del Derive. La conferencia consistió en pequeñas presentaciones sobre los contenidos principales de la unidad seguida de una tarea de elicitación sobre los contenidos tratados. Los estudiantes desarrollaron las tareas y consultaron sus respuestas con otros. Este proceso los forzó a proporcionar argumentos sobre el concepto que estaban trabajando a la vez que le permitió, tanto a ellos como al profesor, valorar la comprensión del concepto y detectar las insuficiencias que tenían. Esta clase se realizó en el laboratorio de computación.

En los talleres se desarrollaron tareas de apropiación-generalización y aplicación de conceptos. El grado de dificultad de las mismas fue en ascenso y el hilo conductor estaba dado por el proceso de mediación semiótica. La ejecución de las tareas propuestas posibilitó que los estudiantes realizaran el proceso de recodificación entre diferentes registros semióticos, en algunos casos se les representó una función en el registro algebraico para que la llevaran al registro gráfico y viceversa. De forma general, los estudiantes mostraron mayores dificultades en la conversión del registro gráfico al algebraico. También evidenciaron que generalmente asociaban diferentes significados a los rasgos de los conceptos estando los mismos dependientes de los registros de representación utilizados. En el caso particular de la función lineal $y = a x + b$, se evidenció que generalmente asociaban diferentes significados a los parámetros “a” y “b”. La comparación entre las unidades significantes, en este caso los parámetros “a” y “b”, entre los diferentes registros semióticos, y la variación de los parámetros, posibilitó ir articulando los significados atribuidos a ellos, lo que coadyuvó a la integración de los mismos en el concepto de función lineal.

Las tareas relativas a las características de los parámetros y variables mostraron que para algunos estudiantes era natural utilizar parámetros para generalizar una relación o un procedimiento, mientras que otros parecían estar confundidos por la utilización de varias letras en una expresión, cada una teniendo un diferente rol. El desarrollo de este tipo de tareas demostró que algunos estudiantes no superaron las dificultades en relación a la comprensión del carácter generalizador de los parámetros, lo que se tuvo en cuenta para la planificación de otras tareas de este tipo para el resto del curso.

La realización de tareas de aplicación a nuevos contextos, como en la que debía establecer relaciones funcionales a partir de situaciones reales, mostró que existía un desarrollo desigual en los estudiantes en el proceso de conversión del lenguaje natural al lenguaje algebraico, por lo que presentaron problemas en la modelación.

Se realizaron dos clases prácticas dedicadas a graficar funciones y resolver ecuaciones lineales. Se evidenció que, en la resolución de ecuaciones lineales los mismos mejoraron sus resultados al solo presentar dificultades la tercera parte de los estudiantes, lo que se constató con el control realizado por el profesor sobre el desarrollo y resultados de los ejercicios en la clase. Las argumentaciones de los estudiantes evidenciaron un mayor dominio de los conceptos tratados en las tareas, así como un mejor tratamiento de los mismos en cada uno de los registros utilizados.

En la mayoría de las clases el profesor se apoyó en el uso de los asistentes matemáticos, el mismo orientó y controló el trabajo que ejecutaron los estudiantes tanto de forma colectiva como individual permitiendo el intercambio y la socialización por parte de ellos del conocimiento se está trabajando en ese momento, y comprobó durante toda la clase el grado de cumplimiento de los objetivos de la misma

A través de la aplicación parcial de la metodología, se evidenció la efectividad de los resultados obtenidos en la investigación. Los estudiantes demostraron una mejoría en la formación de los conceptos tratados de la unidad, identificando los conceptos en varios registros semióticos, así como utilizando varios registros para representar los mismos. La decodificación entre registros semióticos demostró que esta era una vía para la coordinación entre los registros, lo cual coadyuvó a la objetivación de los conceptos. La orientación de la actividad matemática dirigida a desarrollar el grado de generalidad con que se apropian los estudiantes del conocimiento algebraico resultó ser adecuada, aunque debe ser sistemática en el curso para lograr los objetivos deseados.

CONCLUSIONES GENERALES

- Del análisis realizado de la evolución del lenguaje algebraico se evidencia el rol del nexo símbolo-objeto para la comprensión de conceptos algebraicos. El análisis del marco teórico revela la necesidad de concebir una didáctica del perfeccionamiento de conceptos algebraicos en estudiantes universitarios, que integre diferentes enfoques (solución de problemas, funcional, generalización, lenguaje e histórico) desde una concepción histórico-cultural, para potenciar la consolidación del nexo símbolo-objeto y posibilitar niveles superiores en las generalizaciones teóricas algebraicas.
- El modelo semiótico informático para el perfeccionamiento conceptual sintetiza la mediación semiótica y la interpretación de las relaciones esenciales del Álgebra (singular-general, objeto–proceso, variable-parámetro) para la apropiación-generalización en coordinación con la aplicación de conceptos, con el empleo de los asistentes matemáticos en interacción social.
- La lógica integradora entre las fases elicitación de los preconceptos, apropiación-generalización y aplicación de conceptos que se viabiliza a través de una metodología para el perfeccionamiento conceptual, propicia en mejor desempeño de los estudiantes en la utilización del Álgebra básica como herramienta de trabajo en aplicaciones matemáticas.
- La utilización del método de criterio de expertos permitió la corroboración del valor científico-metodológico del modelo semiótico informático y la metodología propuesta; además la valoración de los resultados alcanzados en el pre-experimento, posibilitó la constatación de la factibilidad y la pertinencia del modelo y la metodología, lo que contribuye a ofrecer una alternativa de solución para la investigación científica en la didáctica del Álgebra en la formación conceptual.

RECOMENDACIONES

- Proyectar investigaciones didácticas que permitan explicitar el razonamiento algebraico a través de generalizaciones en situaciones-problemas matemáticos.
- Continuar sistematizando la estructura de relaciones del modelo semiótico informático propuesto a partir de elevar la idoneidad didáctica del mismo.

UNIVERSIDAD DE CAMAGÜEY
Centro de Estudios de Ciencias de la Educación “Enrique José Varona”

UNIVERSIDAD APEC
Departamento de Matemática

PERFECCIONAMIENTO DE LA FORMACIÓN DE CONCEPTOS ALGEBRAICOS EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS CON EL EMPLEO DE LOS ASISTENTES MATEMÁTICOS

Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas

Autora: M.C. Ileana Miyar Fernández

Tutores:
Dra. María de los A. Legañoa Ferrá
Universidad de Camagüey

Dr. Ramón Blanco Sánchez
Universidad de Camagüey

Santo Domingo
2009

AGRADECIMIENTO

Deseo expresar mi agradecimiento:

- A la Universidad APEC, por fomentar la formación, desarrollo y especialización de su cuerpo docente en aras del desarrollo de una cultura de investigación.
- A mis profesores de los proyectos de la Universidad de Camagüey.
- A mi tutor Ramón Blanco Sánchez por sus consejos, asesoría y conocimiento durante todo el desarrollo de este trabajo.
- y especialmente a mi tutora, María de los Ángeles Legañoa Ferrá que sin ella hubiera sido imposible la culminación de este trabajo, ofreciéndome en todo momento su apoyo incondicional, dedicación, amor, estímulo y experiencias.

¡Gracias por su valiosa ayuda!

DEDICATORIA

- A mi familia.
- A mi esposo.
- A todas las personas que durante todo este tiempo me apoyaron e hicieron posible esta investigación.

SÍNTESIS

La presente investigación tiene como objeto el proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra básica en la educación superior. Está orientada al perfeccionamiento de la formación de conceptos algebraicos en estudiantes a partir de un modelo semiótico informático y de una metodología como instrumento para su implementación. El modelo está integrado por tres subsistemas: elicitación de preconceptos, apropiación-generalización y aplicación de conceptos y se dinamiza a través de la contradicción existente entre el objeto matemático y la multiplicidad de representaciones semióticas que sirven para materializarlo. La novedad científica consiste en revelar la lógica didáctica del perfeccionamiento conceptual a través de la consolidación del nexo símbolo-objeto matemático y la generalización teórica tomando como base la mediación semiótica y la interpretación del carácter singular-general del objeto algebraico, así como de las relaciones dialécticas objeto-proceso y variable-parámetro, con el empleo de los asistentes matemáticos. La metodología hace viable el perfeccionamiento conceptual en los estudiantes, propiciando un mejor desempeño en el empleo del Álgebra básica en aplicaciones matemáticas Para corroborar el valor científico metodológico de la propuesta (modelo y metodología) se empleó el método de criterio de expertos y para determinar la factibilidad y pertinencia se realizó un pre-experimento pedagógico formativo en la asignatura Álgebra Universitaria.

TABLA DE CONTENIDO

Pág.

INTRODUCCIÓN

El perfeccionamiento de la enseñanza en la República Dominicana desde hace algunos años se ha convertido en el centro de atención de la Secretaría de Estado de Educación y Cultura (SEEC), en correspondencia con la política educacional que ha trazado el estado dominicano (SEEC, 2008). El presidente de la República Dominicana Dr. Leonel Fernández expresó: "…la educación y el manejo de los conocimientos es la mejor arma para que los pueblos puedan lograr sus metas de desarrollo en estos nuevos tiempos". (Fernández, 2008).

Por otra parte, los resultados alcanzados por la República Dominicana en el "Primer Estudio Internacional Comparativo del Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación"(UNESCO, 1998), aplicado en el año 1997 en 11 países latinoamericanos, la situaban en uno de los últimos lugares entre los participantes. Recientemente la UNESCO en su informe "Educación para todos en el 2015. ¿Alcanzaremos la meta?", ubica nuevamente a República Dominicana en el lugar 14 de los 17 países de América Latina que participaron en el estudio, en cuanto a la posibilidad del cumplimiento de la meta del milenio de educación. (UNESCO, 2007), por lo que es imperioso atender estos resultados dado que repercuten en la educación superior.

La Secretaría de Estado de Educación Superior Ciencia y Tecnología (SEECYT) de la República Dominicana ha reconocido en un reciente informe[1] que la tasa de deserción estudiantil es en la actualidad de más de un 50%, debido entre otras causas, a los problemas que presentan los estudiantes en la formación precedente. En los retos o desafíos relativos a la oferta, la demanda y la transformación de las carreras que se reflejan en el citado informe, se expresa la necesidad de

[1] Plan Decenal de Educación Superior 2008-2018, http:// www.seescyt.gov.do/plandecenal/

desarrollar programas propedéuticos para alcanzar mayores niveles de calidad en la educación superior y lograr resultados satisfactorios de formación académica.

La Universidad APEC, *(*UNAPEC) se ha propuesto alcanzar los máximos estándares de calidad como un reto del nuevo milenio. En aras de lograr este objetivo, ha realizado diversas acciones encaminadas a perfeccionar sus procesos sustantivos. Dentro de estas acciones desarrolló un análisis sobre la pedagogía del desempeño del docente en el área de Matemática, y decidió acometer la tarea de elevar la calidad del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, creando el proyecto *"*Mejora de la Enseñanza de la Matemática*"* en cooperación con la Universidad de Camagüey, Cuba.

Unido a esto, la Universidad APEC llevó a cabo un proyecto de virtualización conocido como “UNAPEC Virtual”, implementando para ello una política de capacitación de los profesores en las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) para promover su utilización en el proceso de enseñanza-aprendizaje. En ese orden de acciones creó un Centro de Apoyo a la Docencia (CADOC) con la finalidad de proporcionar los recursos tecnológicos y asesorías en la preparación de materiales didácticos para el uso de entonos virtuales de enseñanza-aprendizaje.

Enseñar Matemática es una problemática importante y actual en todos los países. El impacto de las TIC sobre la enseñanza en general y en particular sobre la Matemática, unido a la necesidad del empleo de esta ciencia para el desarrollo del pensamiento lógico, la capacidad de razonamiento y la comprensión dinámica y cambiante de la realidad objetiva, obligan a perfeccionar cada vez más los métodos y procedimientos de la enseñanza de la Matemática, de manera que se logre la formación de un egresado con una alta capacidad de adaptabilidad y habilidades para *"*aprender a aprender".

Los objetivos de la educación no se pueden lograr sólo con la utilización de los métodos explicativos e ilustrativos, los cuales no garantizan completamente la formación de las capacidades necesarias a los futuros profesionales en lo que respecta, fundamentalmente, a su independencia y a la solución creadora de los problemas no rutinarios y profesionales que se presenten. También se ha demostrado que en la enseñanza-aprendizaje de la Matemática estos métodos son insuficientes, es así como en los procesos de conceptualización y generalización teórica se requiere el desempeño por parte del estudiante de una actividad social reflexiva mediatizada por artefactos (Radford, 2006). Lo planteado anteriormente pone de manifiesto la importancia de la aplicación de nuevos métodos en escuelas y universidades, la cual constituye una de las vías para la erradicación de las deficiencias existentes en el proceso de enseñanza–aprendizaje de la Matemática. Una forma de lograr la renovación y modernización deseada es a través de la inclusión en los currículos de estudio del uso de las tecnologías como recursos para el aprendizaje.

En los últimos años se ha producido un fuerte movimiento dentro de la comunidad de profesores que utilizan los asistentes matemáticos en la enseñanza-aprendizaje de la Matemática, con el fin de cambiar los usos didácticos tradicionales de estas herramientas. En muchos casos el uso se reduce a utilizar la computadora como una calculadora potente de altas prestaciones, lo que representa claramente una subutilización de estos recursos, por lo que se hace necesario un cambio de punto de vista para optimizar las oportunidades que ofrecen las TIC y tratar de fomentar la creatividad matemática de los estudiantes (Ortega, 2002; Galán y otros, 2002a; Galán y otros, 2002b).

Diversos autores argumentan que se deben modificar dichos usos para maximizar las oportunidades que ofrecen estas tecnologías (García y otros, 2002), orientando su aplicación en el sentido de incidir positivamente en el aprendizaje (Dubinsky y Noss, 1996), aumentar considerablemente la posibilidad de experimentación (Hoya y otros, 2002) y permitir que el estudiante construya su conocimiento matemático bajo la orientación del profesor (Nava, 1998). De aquí se deriva la necesidad de profundizar en el uso adecuado de teorías psicológicas y pedagógicas, en la integración de las aplicaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje y en realizar trabajos encaminados a formular una metodología para la enseñanza sustentada en el empleo de las TIC.

La apropiación de los conceptos matemáticos por los estudiantes, es uno de los aspectos donde se manifiestan deficiencias notables y aunque se ha trabajado al respecto desde diferentes dimensiones estas deficiencias se mantienen en la actualidad. Por otra parte se aprecia en la literatura científica especializada, que dicha problemática ha sido tratada desde la perspectiva de la mediación semiótica mediante el uso de las TIC, sin embargo aún no se han resuelto los problemas relativos a la formación conceptual. (Godino, 2002; D'Amore,2001; Doerr, 2001, Arzarello y Robutti, 2004).

La mediación semiótica a través de registros de representación semiótica (RRS) y su contribución a la formación conceptual matemática ha sido ampliamente tratada en la literatura (Duval, 1988; Radford, 2004a; D'Amore, 2001; Godino y Batanero, 1999; Otte, 2003; Steinbring, 2005). Estos autores asumen que la construcción de los conceptos matemáticos depende estrechamente de la capacidad de usar más registros de representaciones semióticas de esos conceptos, esto significa representarlos en un registro dado, tratar tales representaciones en un mismo registro y de convertir tales representaciones de un registro dado a otro.

En la Matemática, específicamente en el Álgebra se deben utilizar las computadoras como herramienta didáctica para posibilitarle al estudiante utilizar diferentes registros de representación semiótica y de este modo materializar los conceptos, logrando una mejor apropiación de los mismos. (Santandreu, 2005; Darío y otros, 2007). Autores como Hillel y otros (1992); O'Callaghan, (1998); Burrill (2002) y Doerr, (2001) han realizado investigaciones sobre el uso de las computadoras para la materialización y reconversión semiótica a partir de las posibilidades que brindan los asistentes matemáticos para este fin. Además, las investigaciones han demostrado que las computadoras posibilitan realzar, enfatizar y alentar al estudiante a participar y a involucrarse con más libertad e independencia en su propio proceso de enseñanza-aprendizaje, en el que tendrá un rol activo. También propician la interactividad, despiertan la motivación y permiten, a su vez, una atención diferenciada a los estudiantes.

En relación con el proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra las investigaciones (Kieran, 2007, Bartlo (2007), Drijvers, 2003; Kindt, 2000; Gravemeijer y otros, 2000; Pozzi, 1994) revelan dificultades. Dentro de estas se pueden destacar el hecho de que los estudiantes cometen a menudo errores mientras ejecutan operaciones algebraicas, les resulta difícil detectarlos y corregirlos. Incluso estudiantes que son capaces de realizar procedimientos algebraicos específicos tienen un significado muy limitado de ellos, y cometen errores cuando se les cambia ligeramente la presentación del problema.

En este estudio son consideradas varias dificultades que se describen en la literatura relativas al proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra, como son:

- El nivel abstracto en el que se resuelven problemas, la no relación entre las situaciones concretas en que ellos se encuentran y la falta de significado que los estudiantes atribuyen a los objetos matemáticos en el nivel abstracto.
- La necesidad de determinar las operaciones algebraicas que son parte del proceso global de resolución de problemas.
- El lenguaje algebraico con sus convenciones específicas y símbolos.
- El carácter de objeto de las fórmulas algebraicas y las expresiones, donde los estudiantes a menudo los perciben como procesos o acciones.

- Los estudiantes presentan la limitación de asociar el concepto u objeto matemático a un solo registro de representación semiótica (RRS), por lo que sustituyen el concepto por una de sus representaciones.

En la Universidad APEC se presenta la problemática de que los estudiantes tienen dificultades con el aprendizaje del Álgebra básica que se imparte, corroborado a través del bajo porcentaje de estudiantes aprobados en la asignatura (35 %) y los errores operacionales en los que subyacen errores conceptuales detectados en la revisión de exámenes parciales y finales.

Para profundizar en dicha situación e indagar en sus posibles causas, se realizó un diagnóstico causal en estudiantes de las carreras de negocios, de la Universidad APEC, consistente en encuestas a estudiantes, la observación a clases, la revisión de exámenes, entrevistas a profesores, análisis de documentos y pruebas pedagógicas, todo lo cual puso en evidencia un conjunto de insuficiencias que permitieron corroborar las detectadas en el diagnóstico fáctico.

Las insuficiencias que presentan los estudiantes universitarios en la aplicación del Álgebra como herramienta de trabajo en la propia Matemática manifiestan la existencia de insuficiencias en el aprendizaje conceptual del Álgebra básica en la universidad, entre los que se pueden destacar:

- El dominio conceptual de la función, elemento fundamental del lenguaje matemático, que conduce a errores en la modelación de sistemas reales.
- El concepto de conjunto solución que conduce a errores en la utilización de las ecuaciones como herramientas matemáticas.
- El dominio conceptual de tecnicismos algebraicos en la resolución de las ecuaciones conduce a obtener soluciones extrañas o perder soluciones en la ecuación.
- El tecnicismo algebraico en el trabajo con desigualdades. El tratamiento de las desigualdades como igualdades, no precisan el concepto.

El diagnóstico causal apuntó a que una de las causas fundamentales de tales insuficiencias estaba en que el proceso de enseñanza-aprendizaje no contribuye a la correcta formación de los conceptos del Álgebra básica, dada por la limitada consolidación del nexo símbolo-objeto matemático debido a las insuficiencias existentes en la materialización de los conceptos.

A tenor con todo lo antes expuesto se puede decir que se aprecia como **problema científico** las insuficiencias que presentan los estudiantes universitarios en la utilización del Álgebra básica como herramienta de trabajo en aplicaciones matemáticas.

Es por ello que se declara como **objeto de la investigación** el proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra básica en la educación superior.

De acuerdo a lo planteado, esta investigación se propone como **objetivo** elaborar una metodología sustentada en un modelo semiótico informático que contribuya al perfeccionamiento de la formación de conceptos algebraicos en estudiantes universitarios.

Se reconoce como **campo de acción** de la investigación la formación conceptual en los estudiantes con el empleo de las TIC.

Para dar solución al problema, esta investigación se plantea la siguiente **hipótesis:** "Si se aplica una metodología basada en un modelo semiótico informático que tome en cuenta la contradicción existente entre el **objeto algebraico** y la **multiplicidad de representaciones semióticas que sirven para revelar el conjunto de rasgos esenciales que lo caracterizan**, puede contribuirse a perfeccionar la formación de los conceptos algebraicos en los estudiantes y por ende, a su empleo en actividades matemáticas".

Conforme con el objetivo y la hipótesis de la investigación se realizaron las siguientes **tareas científicas:**

1. Caracterizar el proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra básica en la educación superior.

2. Establecer la base teórica que permite sustentar la mediación semiótica con el empleo las Tecnologías de la Información y la Comunicación en la formación de los conceptos algebraicos.
3. Caracterizar el estado actual del proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra básica en la Universidad APEC con énfasis en la formación conceptual.
4. Elaborar el modelo semiótico informático para el perfeccionamiento de la formación de conceptos algebraicos en estudiantes universitarios.
5. Diseñar las etapas de la metodología sustentada en el modelo semiótico informático propuesto.
6. Corroborar el valor científico metodológico de los principales resultados investigativos a través del método de criterio de expertos.
7. Determinar la efectividad preliminar de la metodología a través de un pre-experimento pedagógico en la asignatura Álgebra Universitaria de la Universidad APEC.

En el desarrollo de la investigación se desarrollaron métodos y técnicas orientados a:

Teóricos:

- El método histórico–lógico, particularmente en la evolución del lenguaje algebraico.
- El método de análisis–síntesis, el cual se emplea en todos los momentos del trabajo pero en particular para la caracterización epistemológica de la materialización de los conceptos matemáticos del Álgebra con el empleo las TIC, así como también, para la caracterización del objeto y el campo de acción de la investigación.
- El método sistémico estructural funcional en la modelación del proceso de formación conceptual en los estudiantes en el Álgebra básica así como en la metodología que instrumenta este modelo.

Empíricos:

- Para el diagnóstico y determinación del problema se utilizaron el análisis de documentos en la comparación de los programas de Álgebra y resultados académicos reportados por el departamento de Matemática; la observación de clases para caracterizar la actividad de los profesores y estudiantes; encuestas para obtener opinión de los estudiantes en relación a los métodos y recursos que se emplean en la enseñanza del Álgebra Universitaria; pruebas pedagógicas para evaluar la formación conceptual de los estudiantes; análisis del producto de la actividad, en la revisión de los exámenes de los estudiantes y entrevistas a profesores para conocer el trabajo metodológico que se lleva a cabo en la asignatura Álgebra Universitaria.
- Para la valoración de los resultados científicos alcanzados se utilizó el método de criterio de expertos y el pre-experimento pedagógico formativo.

Además, fueron utilizados algunos métodos y procedimientos propios de la estadística descriptiva en lo relativo al diseño de tablas, así como en el método de expertos.

El aporte teórico de la investigación está dado en un modelo semiótico informático para el perfeccionamiento de la formación de conceptos algebraicos en estudiantes universitarios, y el aporte práctico lo constituye la metodología que hace viable el perfeccionamiento conceptual en los estudiantes con el empleo de los asistentes matemáticos, propiciando un mejor desempeño en la utilización del Álgebra básica como herramienta de trabajo en aplicaciones matemáticas.

La novedad de la tesis está en revelar la lógica didáctica del perfeccionamiento conceptual a través de la consolidación del nexo símbolo-objeto matemático y la generalización teórica, tomando como base la síntesis entre la mediación semiótica y la interpretación del carácter singular-general del objeto algebraico, así como de las relaciones dialécticas objeto-proceso y variable-parámetro, con el empleo de los asistentes matemáticos.

La tesis está organizada conforme a la siguiente estructura: introducción, tres capítulos, conclusiones parciales y generales, conclusiones, recomendaciones, citas y referencias, bibliografía y anexos.

En el **primer capítulo** se realiza un análisis histórico de la evolución del lenguaje algebraico y la caracterización epistemológica-didáctica del objeto de investigación: el proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra básica en la Educación Superior. Se realiza la caracterización psicodidáctica de la mediación semiótica en la formación de conceptos algebraicos con el empleo de los asistentes matemáticos y se ofrece una valoración crítica del problema de la investigación, que destaca sus manifestaciones y posibles causas. En el **segundo capítulo** se explica y fundamenta el modelo semiótico informático para el perfeccionamiento de la formación de conceptos algebraicos en estudiantes universitarios. Del modelo elaborado se derivan relaciones que permiten elaborar la metodología para el perfeccionamiento de la formación conceptual en los estudiantes en el Álgebra básica. En el **tercer capítulo** se procede a la aplicación del método de criterio de expertos para corroborar el valor científico-metodológico del modelo semiótico informático y la metodología propuesta. Además se exponen los resultados de la realización de un pre-experimento pedagógico formativo en el Álgebra Universitaria a través del cual se implementó la metodología, donde se determinó la efectividad preliminar de la misma.

Las conclusiones parciales y generales a las cuales ha permitido arribar dicha investigación, dan cuenta de los principales resultados obtenidos, los cuales permiten corroborar el cumplimiento del objetivo y tareas planteadas. Las recomendaciones de la tesis presentan diversos aspectos vinculados al objeto de estudio los cuales, en consideración de la investigadora, deben constituirse en elementos de exploración no abordados y que por su importancia deben desarrollarse en próximas investigaciones.

CAPÍTULO I. MARCO TEÓRICO CONTEXTUAL DEL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA BÁSICA EN LA EDUCACIÓN SUPERIOR

Introducción

A partir de la delimitación del problema de investigación, la necesidad de perfeccionar la formación de conceptos algebraicos en estudiantes universitarios, se realiza un análisis histórico de la evolución del lenguaje algebraico y la caracterización epistemológica-didáctica del objeto de investigación: el proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra básica en la Educación Superior. Se realiza la caracterización psicodidáctica de la mediación semiótica en la formación de conceptos algebraicos con el empleo de los asistentes matemáticos, para dejar precisados los referentes epistemológicos y didácticos de la investigación, así como las posiciones de partida que en este orden sustentan la propuesta. Se ofrece una valoración crítica del problema de la investigación, que destaca sus manifestaciones y posibles causas. Se toman en consideración, en calidad de diagnóstico referencial, algunos de los resultados del estudio realizado en el año 2004-2005 en la investigación para la tesis de maestría, “Metodología para la asimilación conceptual del Álgebra Universitaria con el empleo de los asistentes matemáticos”(Miyar, 2005) de la propia autora de este trabajo. Además se realiza un nuevo diagnóstico, lo cual, junto con la caracterización didáctica del objeto, es punto de partida para el establecimiento de la idea que rige esta investigación.

1.1 El proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra básica en la Educación Superior.

El Álgebra es uno de los grandes bloques temáticos de las Matemáticas, la misma se centra en el estudio de las estructuras matemáticas, relaciones y cantidades. El Álgebra comienza con el **Álgebra Clásica**, que se restringe al uso de símbolos abstractos para cantidades numéricas y a la resolución de problemas matemáticos elementales eminentemente prácticos por medio de signos. El Álgebra como ciencia en desarrollo dio lugar a la aparición del **Álgebra Moderna**, que se ocupa del estudio en sí misma de las estructuras algebraicas y sus propiedades. Dentro de ésta se distingue: el Álgebra Lineal, que estudia las propiedades específicas de los espacios vectoriales, el Álgebra Universal, que estudia las ideas comunes a todas las estructuras algebraicas, la Teoría de Números Algebraicos, una rama de la teoría de los números en la cual el concepto de número se expande a los números algebraicos los cuales son raíces de los polinomios con coeficientes racionales y la Geometría Algebraica, que combina el Álgebra Abstracta, especialmente el Álgebra Conmutativa, con la Geometría (Guzmán, 1984).

En cuanto a la clasificación del Álgebra según el nivel educativo, se clasifica en Álgebra básica y Álgebra superior. En la enseñanza básica se imparte el Álgebra Clásica y en la enseñanza superior el Álgebra Lineal y la de grupos, esta última en las especialidades de Matemática.

En República Dominicana el Álgebra básica se comienza a enseñar en octavo grado donde se dan nociones generales, completándose su impartición en el noveno grado (primer año de bachillerato) en el cual se da un curso completo que comprende los temas relacionados con expresiones algebraicas, funciones, ecuaciones e inecuaciones fundamentalmente. La autora coincide con Kaput (2000) en relación a que, la no integración del pensamiento algebraico y su razonamiento a los cursos de Matemática desde edades tempranas provoca que el Álgebra sea considerada como el elemento curricular más problemático de las matemáticas escolares en la actualidad, factor que provoca insuficiencias en su aprendizaje en la enseñanza media.

Esta problemática repercute en la educación superior, provocando deficiencias en la formación de base de los estudiantes. Sin embargo, el estado se ha planteado como reto incrementar los niveles de calidad con equidad, por lo cual incentiva a desarrollar programas propedéuticos dirigidos a alcanzar mayores niveles de educación superior para lograr resultados satisfactorios de formación académica, profesional, científica y tecnológica.[1]

[1] Plan Decenal de Educación Superior 2008-2018, República Dominicana

En la enseñanza superior dominicana se imparten cursos propedéuticos de Álgebra básica para preparar a los estudiantes con vista a los cursos de Matemática que van a recibir en este nivel. En particular en República Dominicana se dedican los dos primeros cuatrimestres a impartir cursos propedéuticos de Álgebra básica, y luego en dependencia de la carrera que lo necesite se imparten cursos de Álgebra superior.

1.1.1 Análisis histórico de la evolución del lenguaje algebraico.

En la enseñanza del Álgebra tiene importancia no sólo la enseñanza de los conceptos sino también el lenguaje utilizado para expresar los mismos, debido a que el uso del lenguaje simbólico favorece el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes.

Las fuentes teóricas (Bortolotti, 1950; Kline, 1991; Colin y Rojano, 1991) distinguen tres fases de la evolución del desarrollo del Álgebra a partir de la forma del lenguaje utilizado, las cuales son asumidas por la autora:

- FASE RETÓRICA: anterior a Diofanto de Alejandría (250 d.C.), en la cual se usa exclusivamente el lenguaje natural, sin recurrir a algún signo, es decir en esta primera etapa no se utilizan los símbolos, los problemas se describen en su totalidad a base de palabras.
- FASE SINCOPADA: desde Diofanto hasta fines del Siglo XVI, en la cual se introducen algunas abreviaturas para las incógnitas y las relaciones de uso frecuente, pero los cálculos se desarrollan en lenguaje natural, es decir, durante este período algunas palabras de uso frecuente se empiezan a abreviar hasta llegar a olvidar su origen, lo cual va produciendo símbolos que no tienen conexión evidente con lo que representan.
- FASE SIMBÓLICA: introducida por Viète (1540-1603), en la cual se usan letras para todas las cantidades y signos para representar las operaciones, se utiliza el lenguaje simbólico no sólo para resolver ecuaciones sino también para demostrar reglas generales, es esta etapa conforme se da el paso hacia la abstracción aparece el lenguaje simbólico, donde las letras tienen un significado independiente de aquello que representan.

En esta fase es importante destacar la transformación ocurrida con la aparición de las computadoras. El desarrollo del pensamiento algebraico se ha potenciado por la aparición de los **nuevos sistemas de representación** propios de las nuevas tecnologías (Bautista, 1994). En este sentido la computadora permite manipular sistemas gráficos y algebraicos de forma indistinta ofreciendo la posibilidad de representar los objetos y procesos matemáticos en diferentes registros de representación, circunstancia que puede facilitar una mayor profundidad en la comprensión de los contenidos algebraicos.

La autora considera que el análisis anterior concreta la necesidad del símbolo en el lenguaje matemático, en particular porque los objetos matemáticos se tratan a nivel conceptual, lo que hace imprescindible disponer de una materialización del pensamiento para estudiar los mismos. Coincide con Godino cuando plantea: "Pensamos que es necesario estudiar con más amplitud y profundidad las relaciones dialécticas entre el pensamiento (las ideas matemáticas), el lenguaje matemático (sistemas de signos) y las situaciones-problemas para cuya resolución se inventan tales recursos" (Godino y Batanero, 1998).

1.1.2 El proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra básica: referentes epistemológicos y didácticos.

La enseñanza del Álgebra ha recibido atención especial en los últimos años a nivel mundial. El 12no Estudio del ICMI[2] titulado 'El futuro de la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra" se destinó a valorar el futuro del Álgebra (Polluelo, 2001). Muchos profesores, educadores e investigadores criticaron el método tradicional de enseñanza-aprendizaje del Álgebra: demasiado énfasis en los símbolos, en las habilidades de manipulación y hechos algebraicos en lugar del desarrollo de conceptos y las habilidades de resolución de problemas (O'Callaghan, 1998).

En relación con el proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra las investigaciones (Kieran, 2007, Bartlo (2007), Drijvers, 2003; Kindt, 2000; Gravemeijer y otros, 2000; Pozzi, 1994) revelan la existencia de diferentes dificultades. Dentro de estas se pueden destacar el hecho de que los estudiantes cometen

[2] International Commission on Mathematical Instruction

a menudo errores mientras ejecutan operaciones algebraicas, les resulta difícil detectarlos y corregirlos. Incluso estudiantes que son capaces de realizar procedimientos algebraicos específicos tienen un significado muy limitado de ellos, y cometen errores cuando se les cambia ligeramente la presentación del problema.

Los estudiantes presentan dificultades en la escritura de expresiones algebraicas que modelan problemas de la vida cotidiana, es decir, se revela la compresión limitada que tienen los mismos del concepto de variable. También presentan dificultades en el concepto de parámetro y no comprenden la relación dialéctica que se da entre las variables y los parámetros en las operaciones algebraicas. Otro problema que presentan es la resolución de ecuaciones, aunque los estudiantes pueden aplicar técnicas algebraicas aisladas en situaciones simples, no pueden a menudo aplicar las técnicas apropiadas conocidas en una situación más compleja. En estos casos, ellos no pueden ver las subexpresiones como objetos, como entidades. También los estudiantes se han acostumbrado a la práctica reproductiva y no al aprendizaje productivo.

Estas dificultades reflejan la existencia de un conjunto de contradicciones que emanan de la comprensión del Álgebra. La autora destaca como las más significativas las siguientes:

- La contradicción informal-formal: Los estudiantes no pueden relacionar el carácter algorítmico y formal de los procedimientos algebraicos al enfoque natural e informal de los problemas algebraicos.
- La contradicción concreto-abstracto: La dificultad es el nivel abstracto al que deben ser resueltos los problemas, comparados con las situaciones concretas que los originan y la pérdida de significados que los estudiantes atribuyen a los objetos matemáticos a este nivel abstracto.
- La contradicción singular-general: Un mismo objeto algebraico intrínsecamente tiene un carácter singular asociado a un contexto específico y un carácter general que le posibilita ser interpretado en diferentes contextos. A los estudiantes le resulta difícil ver en un mismo objeto algebraico estas dos cualidades.

- La contradicción variable-parámetro: la generalización es esencial en la comprensión conceptual del Álgebra. Un símbolo algebraico puede representar variables de diferentes niveles de generalización, eso sucede con las variables y los parámetros. El uso del parámetro permite generalizar lo que ya es general, a una dimensión mayor. Sirve para generalizar expresiones algebraicas, como es el caso de representación de familias de funciones. Para los estudiantes resulta complejo comprender el nivel de generalización que representan los parámetros en interacción con las variables.
- La contradicción objeto-proceso: Una dificultad importante es la dualidad objeto-proceso. Un concepto matemático tiene dos dimensiones: el proceso operacional y el objeto estructural. Para los estudiantes, el proceso operacional domina el concepto. Sin embargo, una comprensión más madura del concepto incluye la dimensión de objeto y es flexible para intercambiar entre sus dos dimensiones. La comprensión del concepto matemático con sus dos dimensiones es un proceso difícil de lograr.

La autora valora que para la formación conceptual del Álgebra son fundamentales las relaciones dialécticas que se dan en las contradicciones variable-parámetro, objeto-proceso y el carácter singular-general del objeto algebraico, dado que el pensamiento algebraico supone la representación de modelos, las relaciones entre variables y su generalización teórica.

En los sistemas educacionales se han elaborado e implementado nuevos enfoques para la enseñanza-aprendizaje del Álgebra. A nivel mundial: Drijvers (2003); Kindt (2000); Gravemeijer y otros. (2000); Pozzi (1994); Bednarz y Janvier (1996); Usiskin (1988). Relativo a la formación de conceptos matemáticos están los trabajos de Brouseau (1983); Duval (1998); González (2005); Berger (2005); Blanco (2006); Radford (2006); Godino, Batanero y Font (2007). En Cuba en la educación superior las investigaciones sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra se han centrado en el Álgebra Moderna, dentro de estos se encuentran los trabajos de Yordi (2004); Vázquez (1998), entre otros.

La enseñanza del Álgebra está enmarcada principalmente en dos tendencias pedagógicas: la constructivista y el enfoque histórico-cultural.

- En la tendencia constructivista en el proceso de enseñanza-aprendizaje hay que tener en cuenta lo que un estudiante es capaz de hacer y aprender en un momento determinado, dependiendo del estadio de desarrollo operatorio en que se encuentre (según las teorías de J. Piaget) y las concepciones que han asumido en su desarrollo, los estudiantes no son tabulas rasas. La concreción curricular que se haga ha de tener en cuenta estas posibilidades, no tan sólo en referencia a la selección de los objetivos y de los contenidos, sino, también en la manera de planificar las actividades de aprendizaje, de forma que se ajusten a las peculiaridades de funcionamiento de la organización mental del estudiante. En la tendencia constructivista de la enseñanza-aprendizaje del Álgebra han trabajado autores como: Greeno (1983); Davis (1984); Coll (1987); Dubinsky (1991); Sfard (1991); Armendáriz (1993); Tall y Gray (2001); Pimienta (2003); González (2007), entre otros.

- En la tendencia histórico-cultural de Vigotsky la enseñanza se concibe como promotora del desarrollo, la metodología básica de enseñanza se fundamenta en la zonas de desarrollo próximo (ZDP) en los estudiantes, para determinados dominios de conocimiento formando el andamiaje adecuado para llegar a conocimientos nuevos; este andamiaje se logra con el uso de diferentes recursos didácticos para obtener diferentes registros de representación los cuales contribuyen a realizar una solución rápida y precisa de las tareas que se presenten en este campo. El profesor debe ser un experto en ese dominio de conocimiento particular y manejar procedimientos instruccionales óptimos para facilitar la negociación de las zonas. Algunos autores que han utilizado la tendencia histórico-cultural de Vigotsky en la enseñanza-aprendizaje del Álgebra son: Cedillo (1995); Landa (2001); Hernández (2000); Papini (2003), entre otros.

En la literatura de la investigación educativa se distinguen diversos enfoques para el proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra (Bednarz y Janvier, 1996; Usiskin, 1988). Aunque pueden encontrarse diferencias, los siguientes enfoques son los más comunes:

- El enfoque de solución del problema: ve al Álgebra como un medio de solucionar los problemas que son formulados en las ecuaciones. La pregunta qué valor (es) de la variable, que juega el rol de desconocido, cumple (n) las condiciones requeridas.
- El enfoque funcional: como el estudio de las relaciones y las funciones, que explica el término "funcional". El Álgebra, es entonces un medio de formular e investigar las relaciones entre variables. Esto involucra covarianza y dinámica: ¿cómo el cambio de una variable afecta a otra?. Las variables tienen la característica de cambiar las cantidades.
- El enfoque por generalización, patrones y estructura: se concentra en la generalización de las relaciones, y la investigación de patrones y estructuras. Se distingue la generalización *sobre* y la generalización para. El último involucra la transferencia, pero este estudio trata de generalización sobre clases, situaciones, gráficos y fórmulas. Las variables son números generalizados.
- El enfoque del lenguaje: hace hincapié en el aspecto del lenguaje del Álgebra. El Álgebra es un medio de expresar las ideas matemáticas y para esa sintaxis, se necesitan los símbolos y las notaciones, el mismo ve al Álgebra como un sistema de representaciones, como un sistema semiótico (Drouhard, 2001). Las variables en esta visión del Álgebra son simplemente símbolos que no hacen referencia a un específico contexto-significado obligado.
- El enfoque histórico: Algunos estudios de investigación toman el desarrollo histórico del Álgebra como una fuente de inspiración para el desarrollo de etapas de aprendizaje (Van Amerom, 2002). La razón fundamental para esto es que el desarrollo histórico y la lucha de matemáticos durante todos los siglos demuestran donde están las dificultades de un tema especifico. Por ejemplo, Rojano (1996) usa la perspectiva histórica para hacer hincapié en el papel de la solución de problemas en el desarrollo del Álgebra y discute el peligro de una transición demasiado rápida a la manipulación

simbólica. El desarrollo histórico puede servir como un diseño heurístico en dos maneras: puede apuntar las dificultades conceptuales dentro de un dominio específico, y puede proveer una idea general de las etapas de aprendizaje. Las mismas pueden seguir al desarrollo histórico global, y los ejemplos históricos pueden servir de contextos. Dentro del enfoque histórico algunos autores como Protti (1999) asumen como etapas la evolución de la representación semiótica del Álgebra.

Sin embargo, la autora considera que estos distintos enfoques no pueden ser separados en la práctica educativa, porque una situación problémica frecuentemente provoca actividades algebraicas desde los diferentes enfoques. Por consiguiente, la necesidad de perfeccionar la formación de conceptos matemáticos en la enseñanza-aprendizaje del Álgebra se impone, a partir de un enfoque integrado desde una concepción histórico-cultural que tome en cuenta la relación dialéctica de las contradicciones principales, las relativas al carácter objeto-proceso, variable-parámetro y al carácter singular-general del objeto algebraico.

1.2 El proceso de formación de conceptos en los estudiantes en la Matemática: referentes psicológicos y didácticos.

Este epígrafe se dirige al estudio de los aspectos más significativos en torno al proceso de conceptualización de estudiantes universitarios en la Matemática, desde su perspectiva psicológica y didáctica, lo que permite precisar sus principales referentes y posiciones de partida como sustentos del marco teórico conceptual de la investigación.

1.2.1 Referentes psicológicos de la formación de conceptos matemáticos.

En años recientes se han desarrollado numerosas investigaciones relativas a la formación de conceptos matemáticos a nivel universitario, estableciéndose diferentes teorías para explicar los mismos.

Un grupo de investigadores enfocan este fenómeno a partir de la transformación de un proceso en un objeto sustentando sus propuestas en la adopción de una perspectiva neo-piagetiana. (Gray y Tall 2001; Davis, 1984; Greeno, 1983; Dubinsky, 1991; Sfard 1991). Estos investigadores y sus seguidores, extienden con éxito el trabajo de Piaget con respecto a la Matemática básica, al pensamiento matemático avanzado a partir de la idea de una dualidad proceso-objeto originado en los años 50 en el trabajo de Piaget. Estas concepciones, denominadas encapsulación proceso-objeto, se derivan de las concepciones de Piaget de "abstracción reflexiva" en la cual las acciones sobre objetos conocidos o existentes son interiorizadas como procesos y entonces son encapsuladas como objetos mentales del pensamiento.

Estas concepciones son diferentes en detalles, pero concuerdan en lo general. Comienzan con acciones sobre objetos conocidos (que pueden ser físicos o mentales) las cuales se repiten hasta perfeccionarse en forma de procedimientos que se dan paso a paso, siguiendo la secuencia de las actividades, viendo todo como procesos, luego concebirlo como entidades en si mismas, que pueden ser operadas sobre un alto nivel para dar un nuevo ciclo de construcción.

Sin embargo, la autora de la investigación considera que, aún cuando estas teorizaciones en torno a la construcción de conceptos matemáticos tratan de explicar el proceso interno de construcción, no dan explicaciones a hechos como lo que ocurre cuando un estudiante rebusca alrededor de un nuevo signo matemático que no parece tener conexión con otros signos aparentemente relacionados. De forma semejante, no explica cómo estas actividades que parecen incoherentes pueden conducir al uso de signos matemáticos que son aceptados por la comunidad académica del mundo matemático y que son personalmente significativas al estudiante.

Reconoce que la desventaja central de estas teorías neo-piagetianas son debido a que están arraigados en un marco en el cual la comprensión conceptual se considera derivada principalmente de las acciones interiorizadas, y no integran en el marco teórico el papel del lenguaje (o la representación semiótica) y la interacción social, elementos esenciales en la constitución del cuerpo de conocimientos matemáticos.

El vínculo entre la construcción individual del concepto y el conocimiento social (existente en la comunidad de matemáticos y materializado en textos) está contenido en la teoría de formación de conceptos de Vigotsky, la cual toma como base la mediación semiótica para este proceso.

Vigotsky consideró la palabra como una representación de una generalización y por lo tanto de un concepto. Como tal, él postuló que el niño utiliza una palabra para los propósitos de la comunicación antes que el niño tenga una comprensión completamente desarrollada de esa palabra. De igual forma sucede con los estudiantes universitarios, el uso de una palabra o un signo para referirse a un objeto (real o virtual) ocurre antes de que tengan una comprensión total del significado matemático del concepto involucrado. En la práctica los estudiantes comienzan comunicándose con pares, con los profesores, escribiendo, antes de tener una total comprensión del signo matemático. Es esta comunicación con los signos la que da inicio a un nuevo concepto.

> "Es el uso funcional de la palabra, o cualquier otro signo, como medio de enfocar su atención, de seleccionar características distintivas y de analizarlas y de sintetizarlas, que desempeña un rol central en la formación del concepto" (Vigotsky, 1986, p. 106).

En segundo lugar, pero estrechamente ligado a la idea anterior, está el argumento de Vigotsky de que la construcción del concepto no ocurre de forma espontánea, independientemente de su significado en el mundo social.

En Matemática se espera que un estudiante construya un concepto cuyo uso y significado sea compatible con su uso en la comunidad matemática. Para hacer esto el estudiante necesita usar los signos matemáticos en comunicación con otros más experimentados (incluyendo el libro de texto los cuales incorporan el conocimiento de otros más versados). En esta forma, la construcción del concepto se hace en interacción social.

Vigotsky (1978) consideró todas las funciones mentales humanas más altas como productos de la actividad mediada. El papel del mediador es desempeñado por herramientas psicológicas (signos tales como palabras, gráficos, símbolos del Álgebra) y herramientas físicas. Estas formas de mediación, que son ellas mismas productos del contexto socio-histórico, no están solo para facilitar la actividad; sino que definen y forman procesos internos. La idea esencial en el trabajo de Vigotsky es que la inclusión de signos en la acción transforma fundamentalmente a la acción misma. Así Vigotsky vio en la acción mediada por los signos como el mecanismo fundamental que liga el mundo social externo con los procesos mentales humanos internos, a la vez que elevan las funciones psíquicas a un grado superior.

Como plantea Vigotsky:

> "El rasgo fundamental de la actividad humana es su carácter mediatizado por el instrumento que se interpone entre el sujeto y el objeto de la actividad. El papel central de los **instrumentos de mediación** en la constitución del psiquismo lo ocupan: **las herramientas y signos**. Las herramientas están orientadas hacia los objetos físicos, mientras que los signos permiten organizar el pensamiento, son herramientas orientadas hacia el interior y el exterior de un sujeto, produciendo cambios en los otros" (Vigotsky, 1978).

A diferencia de la herramienta, el **signo o símbolo** no modifica materialmente el estímulo, sino que modifica a la persona que lo utiliza como mediador y en definitiva, actúa sobre la interacción de una persona con su entorno. Los símbolos cumplen la función básica de coordinar a los seres humanos con el mundo físico y entre sí. Son al mismo tiempo materiales e ideales (es decir, conceptuales o simbólicos), por lo que a la vez que permiten actuar sobre el mundo funcionan también como significado.

En un primer estadio, el símbolo sólo representó el objeto, y no sus nexos y relaciones internas; no obstante lo elemental de esta primera relación símbolo-objeto, ella fue la premisa imprescindible para el desarrollo del lenguaje, premisa a su vez del desarrollo histórico social del hombre.

En su desarrollo histórico-cultural el hombre pasó del estudio contemplativo de los objetos y fenómenos de la realidad, a interesarse por los aspectos internos de las cosas que le rodeaban, y los símbolos expresaron también los componentes internos, de estos objetos y fenómenos, y en el curso de este desarrollo, son los símbolos el medio de que dispone el hombre para materializar las relaciones entre objetos y fenómenos, así como sus nexos internos y esenciales. Del análisis realizado sobre la importancia del símbolo en el desarrollo intelectual del hombre, la autora concluye la necesidad **de la consolidación del nexo símbolo-objeto** si se aspira a desarrollar el proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra desde una perspectiva conceptual.

Asociado a esto, la formación del concepto, según lo discutido arriba, es solamente posible porque la palabra o el objeto matemático se puede expresar y comunicar a través de una palabra o un signo cuyo significado ya está establecido con un carácter social.

En Matemática, los mismos signos matemáticos median dos procesos: el desarrollo de un concepto matemático en la interacción del individuo y de ese individuo con el mundo matemático ya codificado y socialmente sancionado (Radford, 2000). De esta manera, el conocimiento matemático del individuo se constituye de ambas formas, cognitivamente y socialmente.

Vigotsky plantea tres etapas en el proceso de formación conceptual que son: agrupamientos sincréticos, pensamiento en complejos y pensamiento conceptual.

A. Agrupamientos sincréticos. Es la etapa en la que el niño cuando está frente a un conjunto de objetos diversos, como primer paso para la formación de conceptos, coloca los objetos-estímulo en "montones" o cúmulos inorganizados y carentes de todo fundamento. Sus procesos perceptivos tienden a fusionar los elementos más diversos en una imagen inarticulada, partiendo de alguna impresión fortuita.

B. Pensamiento en complejos. En este caso el complejo es tomado como una agrupación concreta de objetos conectados, pero carentes de unidad lógica. Los complejos son, pues, conjuntos que constan de elementos agrupados en base a una serie de conexiones fácticas concretas: semejanzas, diferencias, etc. Dentro del pensamiento en complejo están los pseudoconceptos, en los cuales la reunión de objetos se basa en semejanzas concretas, formando complejos asociativos (aunque no necesariamente esenciales) de resultados aparentemente similares al pensamiento conceptual.

C. El pensamiento conceptual. Presupone abstraer, separar los elementos de la totalidad de la experiencia concreta. Unión y separación son importantes: la síntesis es combinada con el análisis, cosa que no hace el pensamiento complejo. Señala Vigotsky que el concepto se forma no por interjuego de asociaciones, sino por combinación específica de todas las funciones mentales guiadas por el uso de palabras. La clasificación surge cuando en forma deliberada se abstrae las propiedades definidoras y se les usa para categorizar otro material distinto.

En el dominio matemático, un estudiante está utilizando el pensamiento en cúmulos si asocia un signo matemático a otro debido a, por ejemplo, la disposición de la página. La etapa sincrética lleva a la etapa compleja.

El pensamiento en complejo es crucial en la formación de conceptos en la medida que posibilita que el estudiante piense en términos coherentes y se comunique vía palabras y símbolos sobre una entidad mental. Y, como se ha analizado anteriormente, es esta comunicación con otros mejor informados es lo que posibilita el desarrollo de un concepto personalmente significativo cuyo uso es congruente con su uso en la más amplia comunidad matemática. Además, en la etapa del pensamiento complejo el estudiante comienza a abstraer o a aislar diversas cualidades de las ideas o de los objetos, y comienza a organizar ideas con propiedades particulares en grupos, creando así la base para generalizaciones últimas más sofisticadas.

A través del uso de los signos, el estudiante accede al nuevo objeto matemático y puede comunicarse sobre él. Con la regulación o la reflexión social el estudiante eventualmente usará y comprenderá los signos de forma que sea congruente con la Matemática oficial.

La generalización en la formación de conceptos científicos.

Tradicionalmente la generalización se ha relacionado tanto con el proceso que ella involucra, como con la caracterización de su resultado. En el primer caso implica encontrar algunos atributos estables y repetibles en los objetos y señala a su vez el paso de la descripción de las propiedades de un objeto individual a su aplicación a un conjunto de objetos similares. En el segundo caso, su resultado, hace referencia a la posibilidad del individuo de abstraerse de ciertos rasgos particulares y variables del objeto. Dentro de esta perspectiva tradicional tanto la generalización como el concepto son el resultado de un gran número de hechos, a partir de los cuales surge la idea generalizadora, la cual es nombrada mediante la palabra.

Para el dominio de un concepto se requiere, además del conocimiento de sus atributos (estables y esenciales), saberlo emplear en condiciones concretas, saber operar con él. Este planteamiento es central en los pensamientos de Rubinstein (1966) y Davidov (1982), quienes consideran la actividad del pensamiento como un proceso de análisis y síntesis seguido de abstracción y generalización derivadas de los primeros. Para estos autores las principales leyes intrínsecas del pensamiento vienen dadas por las regularidades entre estos procesos y sus interacciones. El pensamiento va desde la misma realidad externa, concreta y no analizada, a la cual nos acercamos a través de los sentidos, hasta la revelación de sus leyes en los conceptos del pensamiento abstracto, y desde estos hasta la interpretación de la realidad. En síntesis, el dominio del concepto así concebido involucra tanto un movimiento de lo concreto a lo abstracto, como también el decurso de lo abstracto a lo concreto. Esta secuencia concreto-abstracto-concreto se evidencia en los diferentes niveles de escolarización.

El proceso ontogenético de la formación de conceptos en el niño, se inicia con las primeras generalizaciones derivadas de la máxima analogía encontrada entre elementos aislados de su experiencia. Son generalizaciones que involucran cierto significado asignado a las palabras; en suma estas generalizaciones se constituyen como actos verbales del pensamiento. En términos de Vigotsky, "la comunicación presupone necesariamente la generalización y desarrollo del significado del discurso; el significado de la palabra debe considerarse no solo como unidad del pensamiento y del discurso, sino también como unidad de la generalización y de la comunicación, de la relación y del pensamiento" (Davidov, 1982).

El análisis mental sistemático de los atributos de los objetos y sus relaciones, lleva al adolescente a realizar generalizaciones más centradas en las cualidades internas de los objetos; corresponde a una generalización teórica adecuada al nivel del pensamiento científico. (Davidov, 1982). Si bien debemos considerar la formación de conceptos como un proceso continuo en el que no es perceptible el paso de los conceptos concretos a los abstractos, conviene precisar que mientras en niños escolares la generalización está más ligada a la percepción, en adolescentes se da como resultado de la deducción a través de las relaciones entre atributos uniformes y estables entre los objetos.

En el desarrollo intelectual del niño primero aparece la generalización asociada a la formación del lenguaje con un carácter empírico, esto es asociada a las características aparentes y comunes de los objetos, pero en la escuela es necesario procurar la formación de la generalización teórica, la cual está asociada a los rasgos esenciales de los objetos y fenómenos de la realidad.

1.2.2 Referentes didácticos de la formación de conceptos matemáticos.

Diferentes autores han asumido la perspectiva vigotskiana como sustento de sus concepciones sobre la enseñanza de la formación de conceptos matemáticos. Dentro de estos se encuentra Berger (2005), que argumenta que el pensamiento preconceptual es una parte necesaria de la acertada construcción del concepto matemático evidenciada en su práctica docente, precisando que el tiempo empleado en el pensamiento complejo no es el mismo para todos los estudiantes, dependiendo de las características de ellos, del objeto matemático en particular, de la tarea y del contexto y las intervenciones sociales. Asume las concepciones de Vigotsky, en lo relativo a que la transición de complejos a conceptos se hace posible por el uso de pseudoconceptos. Estos se asemejan a conceptos verdaderos en su uso, pero siguen teniendo un carácter complejo. La causa de este fenómeno radica en la naturaleza de los enlaces, debido a que los enlaces entre los diversos elementos de un pseudoconcepto son sociales y experimentales más bien que lógicos y abstractos. Pero el estudiante puede utilizar el pseudoconcepto en la comunicación y actividades como si fuera un concepto verdadero.

La autora de la investigación coincide con las ideas de la Berger en cuanto a que los pseudoconceptos pueden ser usados para explicar como el estudiante es capaz de utilizar los signos matemáticos (en algoritmos, definiciones, teoremas, resolución de problemas, etc.) de forma efectiva como son reconocidos por la comunidad matemática aún cuando el estudiante puede no entender completamente el objeto matemático. Considera además que el proceso de enseñanza-aprendizaje debe dirigirse a un uso apropiado del concepto junto con las intervenciones sociales, para provocar que el pseudoconcepto sea trasformado en concepto científico.

Otro aspecto abordado en los estudios sobre el enfoque histórico-cultural en la enseñanza de la formación de conceptos está relacionado con la semiótica, dado por el hecho de que los artefactos y los signos son portadores de convenciones y formas culturales de significación que hacen a la semiótica un campo muy bien situado para entender las relaciones entre los signos a través de los cuales piensan los individuos y el contexto cultural (Radford, 2006).

Para un grupo de investigadores, ha habido una toma de conciencia progresiva del hecho de que, dada la generalidad de los objetos matemáticos, la actividad matemática es, esencialmente, una actividad simbólica (Duval, 1998; Radford, 2004b; D'Amore, 2001; Godino y Batanero, 1999; Otte, 2003; Steinbring, 2005). Otros se sustentan en el uso cada vez mayor de artefactos tecnológicos en la enseñanza-aprendizaje de la Matemática (Arzarello y Robutti, 2004; Borba y Villareal, 2006; Guzmán y Kieran, 2002; Hegedus y Kaput, 2004; Kieran y Saldanha, 2005).

Duval devela la existencia de múltiples formas de representación semiótica que denominó registros de representación semiótica (RRS). En relación a la representación Duval expresa que dado que los conceptos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción, no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de representación. Por ejemplo: una escritura, una notación, un símbolo, un punto, una gráfica, etc. representan un objeto matemático. Un registro está constituido por signos: símbolos, íconos, trazos, etc. Es decir, son medios de expresión y representación semiótica. Estos signos están asociados, de manera interna, según los lazos de pertenencia a una misma red semántica, y de manera externa, según las reglas de combinación de signos en expresiones o configuraciones, estas reglas son propias de la red semántica considerada. (Duval, 1993). Duval expresa:

> "La comprensión (integradora) de un contenido conceptual reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación, y esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión" (Duval, 1993).

Como él sugiere, la construcción de los conceptos matemáticos depende estrechamente de la capacidad de usar varios registros de representación semiótica de esos conceptos, lo que significa: representarlos en un registro dado; tratar tales representaciones en un mismo registro y convertir tales representaciones de un registro dado a otro. Sin embargo, el pasaje de un registro a otro algunas veces no es natural debido al fenómeno de la no-congruencia entre las representaciones de un mismo objeto que provienen de sistemas semióticos diferentes. Tal proceso se hace de manera más espontánea cuando las representaciones son congruentes.

Duval formula la paradoja cognitiva del pensamiento matemático.

> (...) de una parte, el aprendizaje de los objetos matemáticos no puede ser sino un aprendizaje conceptual y, de otra parte, es solo por medio de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Esta paradoja puede constituir un verdadero círculo vicioso para el aprendizaje. ¿Cómo, quienes están en fase de aprendizaje podrían no confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas siendo que ellos no pueden tener relación más que con las representaciones semióticas? La imposibilidad de un acceso directo a los objetos matemáticos, diferente de cada representación semiótica, hace la confusión casi inevitable. Y, al contrario, ¿cómo pueden ellos adquirir dominio de los tratamientos matemáticos, necesariamente ligados a las representaciones semióticas, si no tienen ya un aprendizaje conceptual de los objetos representados? Esta paradoja es aún más fuerte si se identifica actividad matemática con actividad conceptual y si se consideran las representaciones semióticas como secundarias o extrínsecas". (Duval, 1993, p. 38)

La autora concuerda con Duval en la necesidad de utilizar múltiples registros de representaciones semióticas y la transferencia entre estos registros para la enseñanza de la formación de los conceptos algebraicos, así como los errores que se provocan en la enseñanza de los conceptos cuando se trabajan estos desde un solo modo de representación, es por esto la importancia de enseñar los procesos de conversión entre registros.

Pero otros autores abordan nuevos elementos desde esta dimensión para la compresión conceptual. Este es el caso de Radford (1998, 2003) en la **teoría cultural de la objetivación**, una teoría de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática que se inspira de escuelas antropológicas e histórico-culturales del conocimiento. Dicha teoría se apoya en una epistemología y una ontología no racionalistas que dan lugar, por un lado, a una concepción antropológica del pensamiento y, por el otro, a una concepción esencialmente social del aprendizaje.

La autora comparte con Radford su concepción sobre la enseñanza-aprendizaje de la Matemática en relación al carácter semióticamente mediatizado del pensamiento y su modo de ser en tanto que es praxis reflexiva.

D'Amore trata el problema de la ontología y conocimiento de los objetos matemáticos, centrándose en particular en el problema de la representación del objeto y su sentido, formulando la dependencia del cambio de sentido con el cambio de la representación del objeto.

> "Sin duda, el uso de distintas representaciones y su progresiva articulación enriquecen el significado, el conocimiento, la comprensión del objeto, pero también su complejidad. El objeto matemático se presenta, en cierto sentido, como único, pero en otro sentido, como múltiple. Entonces, ¿cuál es la naturaleza del objeto matemático? no parece que haya otra respuesta que no sea la estructural, formal, gramatical (en sentido epistemológico), y al mismo tiempo la estructural, mental, global (en sentido psicológico) que los sujetos construimos en nuestros cerebros a medida que se enriquecen nuestras experiencias" (D'Amore, 2006, p. 13).

La autora coincide con la noción de D'Amore y otros autores en cuanto al significado de un término o expresión desde un punto de vista pragmático, que el uso de diferentes registros semióticos permitirán al individuo la mejor comprensión del objeto.

Godino y otros autores han desarrollado un Enfoque Onto-Semiótico (EOS) como marco teórico para la didáctica de las matemáticas impulsado por problemas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática y la aspiración de articular las diversas dimensiones y perspectivas implicadas. Este trabajo de articulación se hace con la interrelación de varias disciplinas vinculadas a la propia Matemática, la Epistemología, Psicología, Pedagogía, Sociología, Lingüística, entre otras. Cada una de estas disciplinas se ocupa de aspectos parciales de los problemas que plantean la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática, usando para ello sus propias herramientas conceptuales y metodológicas. El punto de partida del EOS es la formulación de una ontología de los objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la Matemática como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado, pero teniendo en cuenta además la dimensión cognitiva individual.

La consolidación del nexo símbolo-objeto para la formación de conceptos matemáticos.

En el trabajo matemático, los símbolos (significantes) remiten o están en lugar de las entidades conceptuales (significados). El punto crucial en los procesos de instrucción matemática no está, sin embargo, en el dominio de la sintaxis del lenguaje simbólico matemático, incluso aunque ésta sea también importante, sino en su semántica, es decir, en la naturaleza de los propios conceptos y proposiciones matemáticas y su relación con los contextos y situaciones problemas de cuya resolución provienen.

Para estudiar la relación entre los signos usados para codificar el conocimiento y los contextos que sirven para establecer el significado del mismo; esta relación ha sido modelizada por diversos autores mediante esquemas de tipo triangular, que se conoce como triángulo epistemológico. Entre estos esquemas destacan los propuestos por Frege, Peirce, Ogden y Richards, así como la interpretación que hace Steinbring. Los elementos que incluye Steinbring son concepto, signo/símbolo y objeto/contexto de referencia. (Puig, 1994). Al respecto se considera también a Vergnaud (1982), para quien un concepto es una tripleta formada por el "conjunto de situaciones que hacen significativo el concepto, el conjunto de invariantes que constituyen el concepto y el conjunto de representaciones simbólicas usadas para presentar el concepto, sus propiedades y las situaciones a las que se refiere".

A diferencia de las citas anteriores la autora considera que la separación entre el concepto y el objeto es factible cuando se refiere a un objeto físico, pero en los casos en que el objeto es un resultado teórico, el concepto y el objeto están muy entrelazados y su separación se hace un poco artificial, por lo que se considera en el presente trabajo solo una relación dual, símbolo objeto. (López, 2006; García, 2006).

Como es conocido, en la Matemática la relación símbolo objeto no es biyectiva, esto es, un mismo objeto puede tener más de un registro de representación semiótica como plantea Duval (1993), entre otros. Por la naturaleza de los objetos matemáticos, su no percepción física, precisan diferentes registros de representación semiótica para acceder a su significado. Generalmente cada registro pone de relieve determinadas características del objeto matemático, por lo que se precisa la multiplicidad de registros para la comprensión del todo, siendo necesario, como expresa Duval, la conversión de un registro en otro.

De acuerdo al desarrollo histórico-cultural del estudiante, éste puede tener, y en general tiene preferencias y más habilidad para trabajar con una semiótica que con otra, como se muestra en el trabajo: (García, 2006) donde se destaca que existe un excesivo privilegio del registro algebraico, hecho innegable en todos los diseños de aprendizaje actualmente en práctica, y la ausencia de otros registros, lo que en la práctica resulta perjudicial para los estudiantes, ya que no tienen la posibilidad de sensibilizarse con problemas que exigen articular dichos registros.

En su trabajo Hitt (1996) encuentra marcada preferencia en los profesores para expresar funciones mediante una sola fórmula, comprobando que existía dificultad entre los mismos para trabajar con funciones definidas por más de una fórmula. Lo cual corrobora que las personas se adhieren a determinados registros semióticos por familiaridad con los mismos y no por la necesidad desde el punto de vista cognoscitivo de tal o cual registro. (Boubée y otros, 2006)

En aras de usar una terminología más concreta, tanto el concepto de registro como el de representación semiótica, en relación con el objeto será considerado en la presente investigación, una relación símbolo-objeto. Aunque el símbolo que representa al objeto esté compuesto a su vez por otros símbolos.

En el trabajo de Blanco (1999) se establece que cuando el signo representa un objeto en sí mismo, la relación símbolo-objeto que se crea, tiende a ser estable y perdurar, pero cuando el signo representa relaciones complejas entre los componentes del objeto, o la complejidad de sus nexos internos, suele ocurrir que el nexo se debilita y el signo deja de representar para el sujeto todas las relaciones y nexos que en realidad representa.

Para la consolidación del nexo símbolo-objeto, se considera por parte de la autora que se requiere, además de que el estudiante trabaje con el objeto representado por diferentes símbolos, que logre ser capaz de identificar el objeto en sus diferentes semióticas, así como expresar el objeto a través de diferentes símbolos.

La complejidad del nexo símbolo-objeto en la Matemática se manifiesta en primera instancia debido a que se establece a través del concepto, representante del objeto matemático, y dado que el concepto contiene todas las características esenciales que identifican al objeto, el símbolo representa al objeto si existen los nexos del símbolo con cada una de las características esenciales del objeto (Blanco, 2007).

En la consolidación del nexo símbolo-objeto juega un papel fundamental la codificación y decodificación de diferentes representaciones semióticas de los objetos matemáticos. Bajo esta perspectiva, una de las actividades fundamentales de los profesores es enfrentar los estudiantes, a problemas en los cuales, para poder resolverlos, necesitan realizar conversiones entre distintos registros (Blanco, 2007).

Los obstáculos didácticos en la formación de conceptos matemáticos.

Otro aspecto tratado por diversos investigadores en la didáctica de la formación de conceptos está relacionado con los obstáculos didácticos.

González (2005) expresa que al diseñar ambientes instructivos para propiciar el aprendizaje de conceptos hay que tener en cuenta un conjunto de factores entre los que se encuentran las. experiencias y conocimientos previos. Estas experiencias o conocimientos previos generalmente son considerados como obstáculos didácticos.

Los obstáculos son conocimientos que han sido, en general, satisfactorios durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas, y que por esta razón se fijan en la mente de los estudiantes, como ideas útiles, posteriormente, cuando el estudiante se enfrenta a problemas nuevos este conocimiento resulta inadecuado y de difícil adaptación a los nuevos contextos. Diversos investigadores han abordado esta temática. Por ejemplo, Brousseau (1983), considera que los obstáculos que se presentan en el sistema didáctico pueden tener diferentes orígenes: epistemológico, didáctico y ontogénico. El obstáculo de origen epistemológico está intrínsecamente relacionado con el propio concepto. Los obstáculos de origen ontogénico son debidos a las características del desarrollo del estudiante. Los obstáculos de origen didáctico son resultado de una opción o de un proyecto del sistema educativo, es decir, de las elecciones didácticas que se hacen al establecer una situación de enseñanza.

A partir del análisis anterior la autora considera que de forma general algunas de las ideas previas o preconceptos con la que los estudiantes llegan a la universidad, son las siguientes:

Obstáculos didácticos:

- La enseñanza simplista de los conceptos provoca su validez solo en determinados contextos. Ante un nuevo objeto de estudio toda la experiencia previa del sujeto conforma un conjunto de preconceptos a través de las cuales el sujeto tratará de comprender el nuevo objeto. Por supuesto que de estos preconceptos unos serán positivos y otros negativos.
- Métodos de trabajo incorrectos, que crean ciertos hábitos que terminan por restringir la flexibilidad del pensamiento de los estudiantes.
- El tratamiento restringido del objeto de estudio, aunque el contenido correspondiente haya sido correctamente tratado.

- Los nexos símbolo-objeto restringidos también determinan la formación de pseudoconceptos.

Obstáculos epistemológicos:

- Los conceptos que posee el estudiante de diferentes objetos y fenómenos a través de los cuales estudiará el nuevo objeto o fenómeno, que en muchos casos se opone a la adquisición del nuevo conocimiento y resultan más difíciles de combatir ya que el concepto que las origina es correcto y no puede ser eliminado de la experiencia del estudiante. Por ejemplo en el caso del Álgebra clásica el producto es distributivo respecto a la suma, por lo cual cuando estudian la potencia están en la mente del estudiante distribuir la potencia respecto a la suma de la misma forma que actúan con el producto.
- La generalización teórica es obstaculizada por la generalización empírica, pues los estudiantes tienden a generalizar basándose en los aspectos comunes y aparentes de los objetos (generalización empírica) y no en los aspectos esenciales (generalización teórica), y sólo con un entrenamiento adecuado el estudiante puede lograr hacer generalizaciones teóricas.
- También se asumen los resultados obtenidos por Drijvers, (2000) relativos a los obstáculos epistemológicos como son: el carácter abstracto que presenta el Álgebra; el carácter formal y la variedad de algoritmos en los procedimientos algebraicos; la modelación de situaciones reales a través del lenguaje algebraico y la interpretación del lenguaje algebraico.

Como resultado del estudio realizado la autora considera que para lograr la formación conceptual y el desarrollo de la generalización teórica del estudiante en el proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra, se hace necesario desarrollar la actividad del estudiante en interacción social mediada por instrumentos semióticos orientada a la consolidación del nexo símbolo-objeto a través de la materialización y recodificación semiótica. Además, dado el carácter histórico del aprendizaje del estudiante se hace necesario tener en cuenta los preconceptos con los que arriba a la universidad y en qué forma estos preconceptos evolucionan en conceptos científicos.

1.3 Las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en la formación de conceptos matemáticos.

En este epígrafe se investigan las posibles contribuciones del uso TIC para el aprendizaje del Álgebra. Primeramente, se reflexionará sobre su empleo en la enseñanza de la Matemática como un marco general. Posteriormente se profundizará sobre sus herramientas para el aprendizaje del Álgebra centrando el análisis en los asistentes matemáticos, qué son, y se revisarán algunas investigaciones didácticas que surgieron inicialmente en la enseñanza de la Matemática. Finalmente se resumirán los principales beneficios y dificultades que el empleo del las mismas provocan en la enseñanza de la Matemática en general.

1.3.1 El aprendizaje conceptual del Álgebra y las TIC.

En esta sección se hace un análisis somero del empleo de las TIC en el aprendizaje de la Matemática en general, y del Álgebra en particular. Este permite ofrecer un marco teórico sobre el uso de las mismas para el aprendizaje conceptual del Álgebra. Primeramente se analizará el uso de las TIC como amplificadores y organizadores de la información. Posteriormente se discutirán sus posibilidades para la materialización y transferencias de registros semióticos. Finalmente se abordará su uso en el proceso general de aprendizaje del Álgebra.

Las TIC como amplificadores y organizadores.

Algunos autores como Pea (1987) consideran que las TIC son medios que ayudan a trascender las limitaciones de la mente en el razonamiento, aprendizaje y solución de problemas. Distinguen dos funciones: la función amplificadora y la función organizadora. La función amplificadora se refiere a la ampliación de posibilidades que ofrecen las mismas, por ejemplo, para la investigación a alta velocidad de muchos casos en similar situación y para incrementar la complejidad de los ejemplos tratados. De este modo las TIC hacen accesibles conocimientos que de otra forma serían muy difíciles de adquirir para los estudiantes.

La autora comparte el criterio de Berger de que el uso de las TIC incrementa la posible zona de desarrollo próximo (ZDP) (Berger, 1998). La función de amplificación es además usada para conducir a la generalización (Mason, 1996).

Además hacen la función de organizar y reorganizar los contenidos que se enseñan. Ellas no sólo modifican cómo se enseña, sino también el qué se enseña. Por ejemplo, Hillel y otros. (1992) describen cómo la posibilidad de simultanear diferentes ventanas con representaciones gráficas y simbólicas cambia el método de cómo se enseñan las funciones. Es importante destacar que la generación de ejemplos proporciona al estudiante conocimientos requeridos para la generalización.

La autora de la investigación considera que las funciones de ampliación y organización están íntimamente relacionadas. Las TIC pueden ayudar a generar una amplia escala de ejemplos y contra-ejemplos que les proporcionan a los estudiantes las oportunidades de reunir información para elaborar la organización de los conocimientos en base a esas experiencias.

Materialización semiótica y transferencias de registros semióticos.

Desde la incorporación de las TIC a la enseñanza de las Matemática se han realizado numerosas investigaciones para argumentar las ventajas que proporcionan las mismas a este proceso. (Hillel y otros., 1992; O'Callaghan, 1998). Los investigadores destacan entre las ventajas: el empleo de contextos realistas, la aplicación del método científico a las situaciones problémicas, materialización e integración de diferentes representaciones semióticas, la experiencia de dinámicas con una situación problémica, una forma flexible de hacer Matemática (Burrill., 2002), facilita la creación de ambientes de aprendizaje interactivos.

La materialización semiótica dentro del Álgebra se relaciona con la elaboración y manipulación de gráficas. En entornos tecnológicos esto se puede hacer de forma rápida, flexible y dinámica. Estos ofrecen oportunidades para hacer transferencias entre diferentes registros semióticos de una relación, y en particular, para vincular entre si representaciones gráficas y algebraicas. (Doerr, 2001). Estas transferencias pueden estimular la percepción de los diferentes registros semióticos como diferentes visiones de un mismo objeto matemático, y pueden vincular las propiedades visuales y algebraicas de la función estudiada.

1.3.2 Investigaciones sobre los asistentes matemáticos en la enseñanza-aprendizaje de los conceptos matemáticos

Los asistentes matemáticos (AM), conocidos también como sistemas de matemática simbólica (Symbolic Mathematical Systems) o sistemas de cálculo algebraico (Computer Algebra Systems), hacen referencia a software para calculadoras o computadoras personales que llevan integradas tres capacidades manipulativas fundamentales: la capacidad numérica, la capacidad gráfica y la capacidad simbólica. La capacidad numérica posibilita trabajar con una aritmética exacta; la capacidad simbólica permite trabajar con objetos no numéricos y operar y realizar transformaciones con símbolos; la capacidad gráfica da la posibilidad de realizar representaciones gráficas en el plano y en el espacio. Dentro de estos se encuentran Maple, Mathematica, Mathcad, MuPAD, Derive, Matlab, Axiom y otros muchos.

El concepto de “resecuenciar”[3] fue tratado inicialmente por Heid, (1988) y se considera que es el inicio de las investigaciones sobre los asistentes matemáticos en la Matemática Educativa. Este se relaciona estrechamente con la función de reorganizar la enseñanza. Heid demuestra que la integración de los asistentes matemáticos dentro de un curso de cálculo para estudiantes del primer año de la universidad posibilitó hacer el mismo desde un enfoque conceptual, donde primero los estudiantes se apropiaban de los conceptos a través de tareas con el asistente matemático, para después desarrollar los ejercicios de cálculo.

Otro aspecto muy discutido en los estudios sobre los asistentes matemáticos está relacionado con la caja blanca y la caja negra. Este tema está dirigido a discutir el rol que juegan los asistentes matemáticos en el proceso de enseñanza-aprendizaje y en particular la relación con las tareas de “lápiz y papel“. Por ejemplo, (Buchberger, 1990) argumentaba que mientras el estudiante estaba aprendiendo un nuevo concepto o técnica debía hacer las tareas a mano para mantener el control y la comprensión

---

[3] *resequencing* en inglés

de lo que hacía. Luego que lo haya aprendido, puede utilizar los asistentes como caja negra para hacer las tareas triviales, posibilitándole centrarse en los nuevos aspectos sin distraerse en detalles que conocen.

Otra concepción opuesta a la primera es la de Berry y otros (1994). Estos sugieren un enfoque que se denomina “caja negra/caja blanca” que consiste en usar el asistente como generador de ejemplos y como herramienta de exploración para confrontar a los estudiantes con las nuevas situaciones. Este enfoque se sustenta en la función de amplificación anteriormente explicada.

Un tercer enfoque, denominado de la “caja gris” fue desarrollado por Macintyre y Forbes (2002). Este consiste en desarrollar paso a paso los procedimientos de solución de problemas utilizando para ello el asistente matemático, pero la estrategia de solución es determinada por el usuario.

La autora de la investigación considera el segundo enfoque (caja negra/caja blanca) como el más pertinente para el proceso de conceptualización. La generación de ejemplos posibilita a los estudiantes la determinación de los elementos esenciales que permitirán identificar el concepto, dando lugar entonces a la generalización.

La brecha existente entre los investigadores en asistentes matemáticos y los investigadores en Matemática Educativa ha ido cerrándose. Las investigaciones de Repo (1994) se basaron en el concepto de abstracción reflexiva. Implica el uso de asistentes matemáticos para el estudio de conceptos matemáticos, involucrando investigaciones en el área de Matemática Educativa con nuevos enfoques en el uso de asistentes matemáticos. Otros estudios que contribuyeron al acercamiento entre investigadores son los de Pozzi (1994). El aborda el razonamiento algebraico utilizando el asistente Derive, así como el proceso de la formación de conceptos.

En Francia, autores como Artigue (2002), han abordado el tema de la pseudo-transparencia y la doble referencia. La pseudo-transparencia significa que la técnica utilizada en los asistentes matemáticos es cercana a la técnica de lápiz y papel, pero no son iguales y algunas veces tienen diferencias muy sutiles. Esta diferencia provoca que cuando los estudiantes están trabajando con los asistentes, algunas veces no estén “descubriendo Matemática” como se prevé, sino que están descubriendo las particularidades del software. Esto es lo que denominan doble referencia, se refieren a las particularidades del software más que a los conceptos matemáticos. Otro estudio que reporta similares dificultades es el de Heid y otros. (1999). Este reporta que los estudiantes necesitan desarrollar la habilidad de reconocer las idiosincrasias típicas de los asistentes matemáticos relativas a fórmulas y expresiones para poder utilizar eficazmente los mismos.

Otro aspecto esencial abordado en las investigaciones es la compresión de conceptos. En esta dirección están los estudios de O’Callaghan (1998), Brown (1998), Graham y Thomas, (1999). Estas investigaciones mostraron que aprender Álgebra con asistentes matemáticos requieren de una idea de los contenidos notacionales, sintácticos y conceptuales y no es cuestión de dejar el trabajo a la computadora. Este trabajo técnico está relacionado con la comprensión conceptual.

También dirigido a la comprensión conceptual están las investigaciones de Chiappini y Reggiani (2003), en Italia, en las cuales abordan la idea de un laboratorio de Matemática soportado por TIC. En estos estudios el laboratorio de Matemática está concebido como una actividad de enseñanza-aprendizaje en el cual el objetivo es provocar un uso integrado de herramientas técnicas y psicológicas orientadas a la construcción de la base empírica que es necesitada para la apropiación de los conceptos matemáticos.

La autora comparte esta visión del uso de los laboratorios de Matemática, sin embargo considera que es fundamental el rol que desempeña el profesor en las actividades de enseñanza-aprendizaje, debido a que le corresponde seleccionar las herramientas tecnológicas y las acciones a realizar con las mismas que permitan la formación de conceptos.

En España en las universidades de Valladolid y de Castilla-La Mancha se han realizados algunos estudios y aplicación de los asistentes matemáticos a la enseñanza de la Matemática destacando sus ventajas y desventajas. (Cabo y otros, 2001; Torre y Martín, 2006; González y otros, 2006). En Cuba, en el Instituto Superior Politécnico “José A. Echeverría”, se trabaja la parte práctica de las asignaturas de Matemática con ejercicios que se resuelven usando el asistente matemático Derive. (Delgado, 2006)

En la actualidad subsisten muchas interrogantes no respondidas en torno al uso de los asistentes matemáticos en la enseñanza-aprendizaje del Álgebra. Estas están relacionadas, entre otras, con las características de los estudiantes, los conocimientos que estos deben poseer para trabajar con los asistentes matemáticos, el impacto de los asistentes en la formación conceptual y en la resolución de problemas, las actividades a desarrollar con los mismos para lograr la transferencia de registros semióticos, los tipos de soportes para los diferentes tipos de aprendizaje, los cambios curriculares, etc. En la investigación la autora abordó algunas de ellas como son las relativas a la formación conceptual y la transferencia de registros semióticos.

No obstante a los diferentes resultados obtenidos por los investigadores, casi todos los autores coinciden en que los asistentes matemáticos contribuyen al aprendizaje del Álgebra, al desarrollo de estrategias de solución de problemas y a la formación de conceptos matemáticos. La primera idea se fundamenta en las potencialidades de los recursos algebraicos que brindan los asistentes matemáticos. Las herramientas computacionales de Álgebra ofrecen un amplio rango de posibilidades algebraicas que hacen posible un enfoque sofisticado y flexible para la solución de problemas que no es posible en otros entornos tecnológicos. Por ejemplo, los estudiantes se sienten confiados cuando trabajan con los asistentes matemáticos debido a que los resultados y las notaciones son matemáticamente correctos. Pueden obtener soluciones exactas y pueden manipular expresiones. La posesión de un repertorio completo de procedimientos algebraicos posibilita explorar diferentes enfoques para la solución de problemas, a partir de los cuales pueden realizar generalizaciones. Además, se pueden vincular la representación y manipulación algebraica con la gráfica, estimulando así una visión integrada del concepto matemático.

La segunda idea está sustentada en las oportunidades que ofrecen los asistentes matemáticos para concentrarse en las estrategias de solución de problemas y formación de conceptos, al estar liberados de los cálculos algebraicos monótonos. Con el uso de los asistentes matemáticos los estudiantes pueden significar y ejecutar acciones sobre objetos matemáticos sin necesidad de hacer procedimientos a mano, lo cual redunda en la comprensión de los conceptos matemáticos.

1.4 Estado actual del proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra básica en la Universidad APEC de la República Dominicana.

La Universidad APEC(UNAPEC), es una universidad dedicada fundamentalmente a los negocios, por lo que las matemáticas juegan un papel muy importante en la preparación de sus egresados, brindándoles las herramientas necesarias para resolver problemas que enfrentaran en la vida real, con eficiencia, claridad, lógica y exactitud.

En UNAPEC la asignatura Álgebra básica ha sido denominada Álgebra Universitaria desde 1988. (Anexo 1) Se imparte en el segundo cuatrimestre de las carreras de Administración de empresas, Administración Turística y Hotelera, Mercadeo y Publicidad, Diseño de interiores y Contabilidad.

Como punto de partida de la investigación se toman los resultados de la tesis de maestría de la autora (Miyar, 2005) donde se detectaron un conjunto de dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra básica entre las que se destacan en el caso de los estudiantes: no aprueban la asignatura y la cursan una y otra vez pues no se apropian de los contenidos (35 % de promoción); llegan al curso con conceptos erróneos de aspectos importantes del Álgebra (funciones, ecuaciones, inecuaciones); presentan errores operacionales en los que subyacen errores en la formación conceptual; son reproductivos, saben repetir ejercicios pero no interpretar situaciones nuevas; utilizan poco las TIC en la solución de tareas.

Atendiendo a estas deficiencias se hizo una reestructuración del programa de la asignatura vigente actualmente (Anexo 2) para lograr mayor coherencia conceptual. Además se demostró la necesidad de incluir en las clases de Álgebra el uso de los asistentes matemáticos ya que les permite a los estudiantes resolver determinados ejercicios con cierta rapidez y exactitud, brindándole a los mismos seguridad en la actividad que realizan, permitiéndoles dedicar más tiempo a la comprensión de los conceptos que con las métodos tradicionales que se enseñan en clases.

No obstante a las modificaciones hechas al programa y a la inclusión de los asistentes matemáticos se revela que aún existen limitaciones en la formación conceptual. De ahí que, la sola incorporación de estos recursos tecnológicos en el proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra, resulta insuficiente si no se desarrolla un proceso desde la perspectiva de su empleo en la mediación semiótica. Este hecho obliga a una comprensión sobre cómo se desarrolla el proceso para obtener una caracterización de sus principales limitaciones.

1.4.1 Diagnóstico.

Para satisfacer la necesidad antes declarada se hizo un diagnóstico en el cuatrimestre enero-abril del 2008 que tuvo en cuenta los siguientes indicadores:

- Métodos y recursos empleados, (dentro de estos el empleo de las TIC en la mediación semiótica).
- Carácter de la participación y productividad de los estudiantes en clases.
- El dominio de conceptos esenciales y registros de representación semiótica utilizados.

Al respecto, la aplicación de técnicas como encuestas a estudiantes (Anexo 3) y entrevistas a profesores (Anexo 4), análisis del producto de la actividad (revisión de exámenes) (Anexo 5), prueba pedagógica sobre conceptos de Álgebra. (Anexo 6), unido a la observación del proceso. (Anexo 7), reveló datos interesantes que demuestran las insuficiencias presentes en el proceso de formación conceptual en los estudiantes. Estos elementos fueron enriquecidos, a su vez, con el análisis documental de la tesis de maestría de la autora y los resultados que reporta el departamento de Matemática cuatrimestralmente sobre la asignatura objeto de estudio. (Anexo 8)

Análisis de los resultados.

A continuación se analizan los resultados por método e instrumentos:

Análisis documental.

Objetivos del análisis documental: Caracterizar el proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra en la Universidad APEC.

Se analizaron los resultados alcanzados en la tesis de maestría de la propia autora (Miyar, 2005) donde se obtuvieron los resultados explicados y demostrados anteriormente, además de los informes cuatrimestral que realiza el departamento de Matemática para dar los resultados de aprobados y reprobados en la asignatura motivo de estudio.

Observación.

Objetivos de la observación: caracterizar la participación de los profesores y estudiantes en las clases, la productividad de la participación de los estudiantes y el uso de los medios audiovisuales en el proceso de enseñanza-aprendizaje en la asignatura Álgebra Universitaria.

Se realizó la observación a nueve clases concluyéndose que generalmente el profesor es el protagonista de la actividad. Los estudiantes se caracterizan por ser pasivos, reproductivos y muestran muchas dificultades en la solución de problemas nuevos; utilizan en la mayoría de los casos solo un registro de representación semiótica para explicar el concepto a tratar y tienen dificultades en utilizar diferentes representaciones dentro de un mismo registro; lo que indica la existencia de un débil nexo símbolo-objeto. Además de forma general se puede plantear que los estudiantes presentan deficiencias relativas a los conceptos y a las relaciones objeto-proceso, variable-parámetro, singular-general.

Encuesta.

Objetivo de la encuesta: Obtener la opinión de los estudiantes relativa a los métodos y recursos que se emplean comúnmente para la enseñanza del Álgebra Universitaria.

Se aplicó la encuesta a 136 estudiantes, se tomaron ocho estudiantes de cada profesor que imparte la asignatura MAT 121 (17 profesores) de forma aleatoria obteniéndose los siguientes resultados: los estudiantes consideran como positivo la orientación que reciben de los docentes sobre los contenidos del curso y el cumplimiento del programa, sin embargo revelaron que es muy limitado el empleo de los asistentes matemáticos y/o otros recursos tecnológicos en las clases, así como insuficiencias en los métodos empleados, los cuales promueven una limitada actividad cognoscitiva en los estudiantes. (Anexo 9)

Entrevistas.

Objetivo de la entrevista: Conocer el trabajo metodológico que se lleva a cabo en la asignatura Álgebra Universitaria en UNAPEC.

Se entrevistó a 11 profesores que imparten la asignatura Álgebra Universitaria donde los mismos expresaron que los estudiantes son muy reproductivos, mostrándose pocos interesados en la clase. La mayoría de los profesores indican que no usan ningún medio audiovisual, que el departamento de Matemática cuatrimestralmente realiza talleres metodológicos pero muy pocos son orientados a la utilización de las TIC en la docencia.

Análisis del producto de la actividad (revisión de exámenes).

Objetivo de la revisión: Identificar la existencia de problemas operacionales debidos a errores conceptuales.

Se hizo la revisión de 120 exámenes (40 del primer parcial, 40 del segundo parcial y 40 del examen final) detectándose las siguientes dificultades: los estudiantes en la mayoría de las ocasiones no pueden resolver problemas formulados literalmente porque presentan insuficiencias en la conversión entre registros semióticos, presentan dificultades al resolver ecuaciones algebraicas pues desconocen las propiedades de las operaciones; en las operaciones con matrices, presentan la preconcepción de que cumplen con la propiedad conmutativa del producto; tienen dificultades con el concepto de función y los conceptos asociados a éste como son dominio, recorrido, etc. De forma general presentan deficiencias conceptuales que conllevan a errores algebraicos operacionales.

Prueba pedagógica sobre conceptos de Álgebra.

Objetivo de la prueba: Determinar el uso de registros semióticos para representar los conceptos, el nivel de de la formación conceptual que tienen los estudiantes y su utilización en aplicaciones matemáticas.

Se les aplicó una prueba conceptual (Anexo 6) a 136 estudiantes en la primera semana de clases, para analizar la comprensión en algunos conceptos elementales de la asignatura. Los resultados derivados del análisis del instrumento aplicado fueron: (Anexo 10).

- 97 estudiantes contestaron cuatro preguntas mal o más, para un 71.3%.
- 24 estudiantes contestaron dos o tres preguntas mal, para un 17.7%.
- Nueve estudiantes contestaron una pregunta mal, para un 6.6 %.
- Seis estudiantes contestaron todas las preguntas bien, para un 4.4 %.

En general en todos los temas de la asignatura se observa un divorcio entre el registro algebraico y el gráfico, privilegiándose el algebraico. En particular, en las ecuaciones de primer grado la clasificación de las ecuaciones es de acuerdo a sus coeficientes; en las ecuaciones de segundo grado de una variable se evidencia la falta de relación entre coeficientes y raíces y la clasificación de las ecuaciones es de acuerdo a los coeficientes.

Como conclusión del diagnóstico se puede decir que: existe un papel protagónico por parte del profesor, los métodos que prevalecen son expositivos con poco uso de medios audiovisuales, así como de otros recursos, lo que provoca una insuficiente materialización de los conceptos. Los estudiantes se caracterizan por ser pasivos, reproductivos y muestran muchas dificultades en la solución de problemas nuevos.; los mismos confunden el concepto matemático con un tipo de representación semiótica; se observa un divorcio entre el registro algebraico y el gráfico, privilegiándose el algebraico, lo que demuestra un débil nexo símbolo-objeto, y además tienen deficiencias en las operaciones algebraicas debido a errores conceptuales. Toda esta información fundamenta como problema de la investigación: las insuficiencias que presentan los estudiantes universitarios en la utilización del Álgebra básica como herramienta de trabajo en aplicaciones matemáticas.

Conclusiones parciales del capítulo.

1. El análisis histórico de la evolución del lenguaje algebraico evidenció la necesidad de investigar las relaciones dialécticas entre los objetos matemáticos y el sistema de signos que se utilizan para su representación, dado el carácter conceptual de estos objetos, de donde se manifiesta la necesidad de la consolidación del nexo símbolo-objeto para la comprensión conceptual.

2. En la interpretación científica realizada por la autora de la investigación, a partir de las categorías esenciales que emergen del objeto y campo de estudio, se singularizan los rasgos del proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra, develándose que en relación con el proceso de formación conceptual se impone utilizar un enfoque que integre los diferentes enfoques (solución del problema, funcional, generalización, lenguaje e histórico) desde una concepción histórico-cultural que tome en cuenta la relación dialéctica de las contradicciones principales las relativas al carácter objeto-proceso, variable-parámetro y al carácter singular-general del objeto algebraico.
3. Se significa que para lograr la formación conceptual y el desarrollo de la generalización teórica del estudiante en el proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra, se hace necesario desarrollar la actividad del estudiante en interacción social mediada por instrumentos semióticos orientada a la consolidación del nexo símbolo-objeto a través de la materialización y recodificación semiótica. Esta actividad debe tomar en cuenta los preconceptos con los que los estudiantes arriban a la universidad, dado el carácter histórico del aprendizaje, así como su evolución hasta convertirse en conceptos científicos.
4. El análisis de las potencialidades del empleo de los asistentes matemáticos en la enseñanza del Álgebra permite concluir que los mismos pueden ser mediadores en el proceso de formación conceptual dado que realzan el desarrollo de una visión más estructural de las expresiones al tratarlas como objetos, posibilitan la materialización de los conceptos a través de diferentes registros semióticos, así como la conversión entre estos, contribuyen a la generalización al posibilitar la exploración para determinar lo general en lo particular así como posibilitan visualizar de forma dinámica los roles de las variables y los parámetros en las expresiones algebraicas.
5. La valoración del estado actual del proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra básica en la Universidad APEC de República Dominicana corrobora las insuficiencias en la utilización del Álgebra como herramienta en aplicaciones matemáticas que develan una insuficiente formación conceptual a partir de un limitado nexo símbolo-objeto.

CAPÍTULO II: MODELO SEMIÓTICO INFORMÁTICO Y METODOLOGÍA PARA EL PERFECCIONAMIENTO DE LA FORMACIÓN DE CONCEPTOS ALGEBRAICOS EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Introducción

En este capítulo se explica y fundamenta el modelo semiótico informático para el perfeccionamiento de la formación de conceptos algebraicos en estudiantes universitarios. El modelo parte de la contradicción esencial que se manifiesta entre el objeto matemático y la multiplicidad de representaciones semióticas a través de los cuales se pone de manifiesto el conjunto de rasgos esenciales que lo caracterizan, expresión de la contradicción dialéctica entre esencia y fenómeno. Del modelo elaborado se derivan relaciones que permiten elaborar la metodología para el perfeccionamiento de la formación conceptual en los estudiantes en el Álgebra básica, la cual tiene como características esenciales la independencia del concepto de una representación semiótica particular y las relaciones dialécticas que se manifiestan en el trabajo algebraico.

2.1 Fundamentación teórica del modelo semiótico informático.

Para el perfeccionamiento de la formación conceptual se requiere superar la contradicción externa que se da entre, las exigencias en el desempeño profesional relacionadas con el empleo del Álgebra básica como herramienta de la Matemática y la apropiación de conceptos algebraicos. Esta contradicción se encuentra relacionada con otra contradicción, que se da en el proceso de formación conceptual, y que es inherente al concepto matemático.

El concepto matemático siempre hace referencia a un objeto que no existe como objeto real, dado que los objetos matemáticos nunca son accesibles por la percepción. Por ende la designación de los objetos matemáticos pasa necesariamente por un registro semiótico de representación. Sin embargo, cada representación semiótica pone de relieve diferentes aspectos del objeto que representa, por lo que se debe considerar como absolutamente necesario desarrollar en el estudiante la habilidad de efectuar diferentes representaciones para la formación del concepto y realizar la conversión entre estas representaciones.

La conceptualización, como actividad cognitiva del aprendizaje matemático, requiere de la utilización de múltiples registros de representación. A su vez es imprescindible distinguir entre el objeto matemático y su representación semiótica pues un mismo objeto matemático puede darse a través de representaciones muy distintas. Toda confusión entre el objeto y su representación provoca una conceptualización inadecuada, promoviendo dificultades en la comprensión del concepto y limitando el uso del mismo como herramienta matemática.

El objeto matemático y la multiplicidad de representaciones semióticas que sirven para revelar el conjunto de rasgos esenciales que lo caracterizan, constituyen una expresión de la contradicción dialéctica entre esencia y fenómeno.

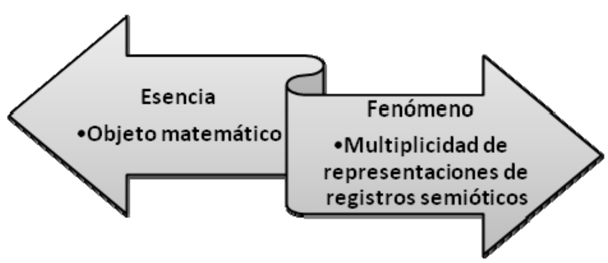


Figura 2.1: Contradicción esencial

La unidad del objeto con su representación semiótica no puede ser comprendida como si uno sustituyera al otro, porque son diferentes. El proceso de formación conceptual implica profundizar desde las representaciones hacia el objeto matemático y viceversa, haciendo abstracciones de éstas para identificar los rasgos esenciales del mismo, y sintetizándose en la concreción del concepto.

El modelo semiótico informático que se propone contribuye a superar las contradicciones que se originan en el proceso de formación conceptual en los estudiantes en el Álgebra básica en la educación superior, perfeccionando el mismo. Está dinamizado por la interrelación que se da entre la contradicción externa y la interna, las cuales en su unidad, constituyen la fuente de desarrollo del proceso.

2.1.1 Presupuestos teóricos e ideas básicas.

Los presupuestos teóricos que fundamentan la concepción del modelo semiótico informático que se propone toman como punto de partida el enfoque sistémico estructural funcional. Este se constituye en el postulado epistemológico general que lo dinamiza, en tanto caracteriza e interpreta su esencia, al revelar el sistema como una totalidad que regula el funcionamiento de las partes que lo integran definiendo los atributos y poseyendo características propias que trascienden las que sus componentes aportan.

Para el proceso de modelación teórica se constituye en sustento psicológico importante el Enfoque Histórico-Cultural de Vigotsky y sus seguidores. Se asume la apropiación o formación de conceptos como un proceso de internalización de la acción mediada en la interacción social, donde el rol de mediador es ejecutado por instrumentos y signos, los cuales no simplemente facilitan la actividad; sino que definen y dan forma a procesos internos donde se manifiesta el carácter mediatizado de la psiquis humana. Se asume que el signo siempre está enmarcado en la actividad práctica del individuo, por lo que el signo se concibe como un objeto mediante el cual se logra la materialización semiótica de los conceptos funcionando en un medio donde las características específicas de la actividad tienen que ser tomadas en cuenta.

En el orden didáctico se toma, como punto de partida para caracterizar la actividad matemática el hecho de que, dada la generalidad y el carácter conceptual de los objetos matemáticos, la actividad matemática es, esencialmente, una actividad mediada, con los símbolos como mediadores semióticos (Duval, Radford, D'Amore) la cual se lleva a cabo al establecer el nexo entre el concepto matemático y su representación semiótica. Dado que el objeto matemático es un resultado teórico, el concepto y el objeto están muy entrelazados por lo que se considera solo una relación dual, símbolo-objeto, comprendiendo la unidad cognoscitiva entre el objeto y el concepto. Dentro de este orden se asume las concepciones de Blanco en cuanto al rol que ocupa la relación símbolo-objeto en la formación conceptual, la cual se lleva a cabo a través de los registros de representación semiótica y que se consolida a través de la identificación y representación del objeto en diferentes registros semióticos.

En relación al significado del símbolo algebraico se asume la distinción formulada por Drijvers en relación a parámetros y variables, distinguiendo los primeros como variables de mayor jerarquía que actúan como generalizadores y dinamizadores de situaciones.

En lo que respecta al uso de los asistentes matemáticos en la enseñanza del Álgebra se asumen las concepciones de Pea en relación a las funciones amplificadora, generalizadoras y organizadoras, así como las funciones que expresa Burril relativas a la materialización e integración de diferentes representaciones semióticas y los planteamientos de Doerr relativos a las transferencias entre diferentes registros semióticos.

En el marco de estos referentes teóricos se formulan las siguientes ideas básicas que sustentan el modelo:

a. Del carácter esencial de la actividad práctica con herramientas semióticas para la conceptualización.

La construcción del conocimiento se realiza desde la actividad práctica, donde el dominio de las herramientas semióticas es un elemento básico, ya que dichas herramientas son esenciales para la actividad cognitiva. La actividad psíquica sólo es posible a través de los mediadores semióticos, los cuales permiten materializar el pensamiento y sobre esta materialización la actividad psíquica sigue su curso.

b. De la formación del nexo símbolo-objeto.

El carácter conceptual de los objetos matemáticos determina la necesidad de su representación a nivel simbólico, además el carácter mediatizado de la psiquis humana expresa la necesidad de la materialización simbólica del pensamiento para poder sacar nuevas conclusiones a partir del conocimiento previo. Por lo tanto si no se establece un correcto nexo símbolo-objeto las conclusiones siguientes pueden ser incorrectas o simplemente no existir.

c. De la recodificación semiótica del nexo símbolo-objeto.

Se reconoce que el sujeto consolida el nexo símbolo-objeto e independiza el objeto de su representación semiótica cuando es capaz de representar el mismo objeto en diferentes registros de representación semiótica (registro literal, algebraico, gráfico, icónico, gestual, etc.) y hacer transferencias entre los diferentes registros de representación semiótica.

d. De la relación dialéctica variable–parámetro.

En el trabajo algebraico se requiere que el símbolo sea capaz de representar tanto una variable como un parámetro, lo cual se manifiesta de esta manera por la relación dialéctica variable-parámetro que existe en el Álgebra.

e. De la relación dialéctica proceso–objeto.

Una expresión algebraica en determinado momento puede ser considerada como un proceso algebraico y en otras como un objeto algebraico dentro de un proceso. La aplicación del modelo pone de manifiesto la relación dialéctica proceso–objeto que se requiere dominar para realizar un trabajo algebraico eficiente.

f. De las potencialidades de los asistentes matemáticos para la formación conceptual.

En los procesos de consolidación del nexo símbolo-objeto los asistentes matemáticos son herramientas que sirven de mediadores entre el estudiante y los conceptos que deben ser aprendidos a través de la materialización y recodificación semiótica que ellos posibilitan. En la comprensión del carácter singular-general del objeto algebraico, los asistentes matemáticos realzan el desarrollo de una visión más estructural de las expresiones al tratarlas como objetos, contribuyen a la generalización al posibilitar la exploración para determinar lo general en lo particular así como posibilitan visualizar de forma dinámica los roles de las variables y los parámetros en las expresiones algebraicas.

2.1.2 Modelo semiótico informático.

Los principales subsistemas que caracterizan el modelo semiótico informático, constituyen el resultado del análisis crítico-valorativo de las fuentes bibliográficas, la experiencia de la autora como investigadora en esta problemática y de la reflexión en torno a los principales resultados obtenidos a través del diagnóstico realizado en el contexto del proceso de enseñanza-aprendizaje en el ámbito universitario. Estos subsistemas con su recursividad propia, se sometieron a consideración de profesionales expertos en la temática y se enlazan mediante relaciones de interdependencia.

Se encuentra integrado por tres subsistemas: elicitación de los preconceptos, apropiación-generalización de los conceptos y aplicación de los conceptos.

Dichos subsistemas influyen e interactúan dialécticamente unos con otros. Tienen en común que representan los procesos que ocurren en la actividad cognoscitiva de los sujetos, los cuales se encuentran mediados por factores externos sobre los que se puede actuar de manera directa en el proceso de enseñanza-aprendizaje para propiciar que la actividad cognoscitiva conduzca a la apropiación de los conceptos por parte de los estudiantes.

1. Subsistema: Elicitación de los preconceptos.

   La elicitación es el proceso de poner de manifiesto los preconceptos de los estudiantes, proceso que es imprescindible para promover el perfeccionamiento de la formación conceptual. El perfeccionamiento de la formación conceptual consiste, en lo que respecta al campo de acción del presente trabajo, en modificar los preconceptos de los estudiantes y sustituirlos por conceptos aceptados por la comunidad científica. La contradicción que dinamiza este subsistema está dada por la relación que existe entre el nuevo conocimiento, los conceptos científicos, y el conocimiento que aporta el estudiante, los preconceptos. Su función es develar los preconceptos para promover la motivación intrínseca hacia el concepto teórico.

   Los estudiantes en la enseñanza precedente utilizan los conceptos sin haberlos formado correctamente, generalmente identificando el concepto con una representación semiótica particular, lo que los lleva a la formación de pseudoconceptos. En este proceso se enfrenta el estudiante con el concepto científico, para promover el paso del pseudoconcepto al concepto científico.

   La elicitación se produce a partir de la actividad matemática que los estudiantes realizan, las cuales pueden desarrollarse con el empleo de los asistentes matemáticos. Los conceptos científicos se representan en su multiplicidad de registros semióticos y los estudiantes tienen que identificar los rasgos esenciales de los mismos, para lo cual deben comparar la información que obtienen de cada forma de representación y su funcionalidad, con el conocimiento previo que tienen de los conceptos. Esta actividad proporciona el sistema de significados y el marco referencial para la comprensión del nuevo conocimiento, así como la percepción de las insuficiencias de sus concepciones previas. Es esencial estimular la interacción entre estudiantes, pues facilita el nivel de metacognición y autoreflexión de los mismos, al tener la necesidad de expresar en palabras o sea, materializar sus conocimientos sobre el concepto. Este proceso proporciona al profesor y al estudiante un conocimiento de las insuficiencias conceptuales de éste, a la vez que promueve en el mismo una motivación intrínseca hacia el nuevo conocimiento.

La identificación de los rasgos esenciales de los conceptos científicos en la representación en los diferentes registros semióticos y la concientización de los rasgos atribuidos por los estudiantes a los pseudoconceptos, constituyen los dos componentes internos esenciales del subsistema (recursividad). Estos componentes en su relación comparativa a través de la actividad matemática que realizan los estudiantes interactuando entre sí con los asistentes matemáticos, dan lugar a la elicitación de los preconceptos.

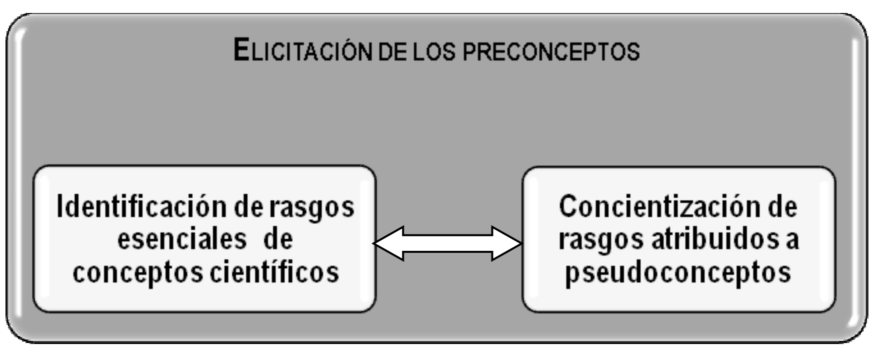


Figura 2.2: Subsistema elicitación de los preconceptos y sus componentes

2. Subsistema: Apropiación–generalización del concepto algebraico.

La formación de conceptos algebraicos es una actividad intelectual dinámica e iterativa que se da en el curso de complejas operaciones en la actividad matemática y su resultado se va perfeccionando a través de la misma. Para su consecución se aborda desde una posición epistemológica y ontológica. En la **posición epistemológica** se precisa la manera en que estos objetos pueden llegar a ser apropiados, mientras que la posición ontológica consiste en precisar la naturaleza de los objetos algebraicos. La síntesis entre estas dos posiciones es la génesis del perfeccionamiento de la formación conceptual.

La función del subsistema es lograr la apropiación del concepto y su generalización teórica a partir de la actividad estructurada racionalmente con el empleo de los asistentes matemáticos.

La **posición epistemológica** se fundamenta en que la formación conceptual se desarrolla a través de los procesos de **internalización** y **generalización teórica**, los cuales se encuentran estrechamente vinculados. Estos procesos se dan en el plano interno mediado y materializado por el símbolo, pero requieren desarrollarse de forma consciente e intencionada. Este proceso se viabiliza con el empleo de los asistentes matemáticos, los cuales son instrumentos de mediación por excelencia debido a que son herramientas que su empleo proporciona sistemas de signos, que posibilitan fortalecer el nexo entre el símbolo y el objeto que representa.

Para que se produzca la generalización teórica y la internalización del concepto matemático científico es preciso que el estudiante desarrolle una actividad matemática en el plano externo en interacción social, mediada y materializada por los signos, los cuales posibilitan la representación de los conceptos a través de diferentes registros que se pueden desarrollar con los asistentes matemáticos. Este proceso está dinamizado por la contradicción que se da entre la materialización del objeto a través de una representación semiótica y la independencia del objeto de una representación semiótica particular.

La representación del concepto en un registro semiótico posibilita al estudiante identificar determinadas características del objeto, las cuales son comprendidas al ser tratadas diferentes representaciones del concepto. Por ejemplo, para la comprensión del concepto función lineal es necesario utilizar diferentes representaciones en el registro algebraico como las siguientes: $P(x) = a_1x + a_0$, $y= a_1x + a_0$, $y = mx + n$, etc. El desarrollo de la actividad matemática a partir del empleo de representaciones diferentes dentro del registro algebraico posibilita al estudiante identificar como características de la función lineal su grado, el coeficiente que multiplica a la variable x y el término independiente. Sin embargo, la representación de un objeto en un registro semiótico no siempre posibilita identificar todos los rasgos esenciales que caracterizan el objeto, dado que la representación semiótica de un concepto no es unívoca. La representación del concepto en un registro semiótico particular es limitada, siendo relativa al registro semiótico.

La materialización semiótica con los asistentes matemáticos emerge entonces de la interacción que se da en la actividad matemática, entre la representación y el tratamiento de los conceptos en un mismo registro semiótico, con el empleo de los asistentes matemáticos.

Figura 2.3: Materialización semiótica con los asistentes matemáticos

Para alcanzar la comprensión total del concepto se necesita entonces desarrollar la conversión que lleva de una representación en un registro semiótico, a la representación en otros registros semióticos diferentes, lo que hace posible la elección de un registro en lugar de otro frente a cualquiera situación relativa al concepto. La conversión entre diferentes registros semióticos ocurre de manera más directa cuando ellos son congruentes, sin embargo este proceso no es evidente para la mayoría de los estudiantes debido al fenómeno de la no congruencia entre los registros de representación semiótica, constituyendo una de las principales causas de las insuficiencias en la formación conceptual.

Para perfeccionar la formación conceptual es necesario enseñar al estudiante a que aprenda a realizar conversiones entre registros semióticos, lo cual puede ser desarrollado a partir del empleo de los asistentes matemáticos, dado que posibilitan el desarrollo de coordinaciones progresivas entre variados sistemas semióticos de representación (algebraicos y gráficos). Los asistentes matemáticos posibilitan realizar un análisis semiótico comparativo progresivo entre las representaciones en distintos registros, al proporcionar un entorno informático que permite colocar dichas representaciones frente a frente y hacer una correspondencia entre unidad significante de la representación en el primer registro con la unidad significante del segundo.

La realización de una actividad matemática centrada en:

a. la representación del objeto en una diversidad de registros utilizando los asistentes matemáticos,
b. la conversión entre registros algebraicos y gráficos, en la cual se comparan y hacen corresponder las unidades significantes del objeto algebraico expresadas en cada registro,
c. la interpretación de sus conversiones mutuas,

posibilita que el estudiante establezca la coordinación entre los registros semióticos, desarrollando así el proceso de recodificación semiótica. Este proceso actúa como dinamizador de la independencia del concepto de una representación semiótica, contribuyendo a la objetivación del concepto. Es importante destacar que este tipo de actividad matemática potencia el aprendizaje de los conceptos, dada su contribución a la interpretación a partir de movilizar las analogías presentes en cada forma de representación.

La **recodificación semiótica** emerge entonces de la interacción que se da en la actividad matemática con los asistentes matemáticos entre la representación de la diversidad de registros semióticos, la comparación y correspondencia entre las unidades significantes del objeto representado y la interpretación de las conversiones mutuas entre los registros semióticos.

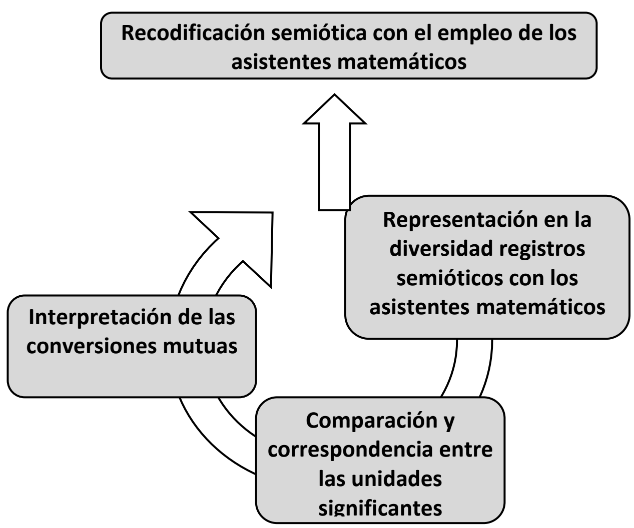


Figura 2.4: Recodificación semiótica con el empleo de los asistentes matemáticos

La recodificación es importante, porque se debe tener en cuenta que el lenguaje matemático tiene diferentes formas de expresión: literal, algebraica y gráfica. Muchas veces la forma gráfica funciona como elemento de enlace entre el lenguaje común, literal, y el lenguaje algebraico, en ocasiones la representación gráfica del enunciado de un problema permite al estudiante construir el modelo analítico, a través del cual se encuentra la solución pedida y en otros casos esta forma gráfica resulta prácticamente imprescindible. No obstante la importancia metodológica de la transferencia de registros, es fundamental que el estudiante esté consciente de su núcleo invariante, al cual llega a partir de la coordinación entre los registros. Además por ser el lenguaje matemático altamente especializado, está sujeto a una sintaxis muy rigurosa, la cual depende estrictamente de los nexos símbolo-objeto.

La actividad de decodificación de un registro semiótico particular para hacer la codificación en otro registro semiótico, determinando los atributos esenciales del objeto que se manifiestan en cada forma de representación, y la coordinación entre estos posibilita elaborar el concepto científico y comprender su carácter general, en cuanto se toma en cuenta una mayor compresión de los atributos esenciales. Esta elaboración posibilita articular y sintetizar estas propiedades del concepto, independizando esta construcción de un registro semiótico particular, lo que le confiere un mayor grado de abstracción.

Estas formas de mediación semiótica con el empleo de los asistentes matemáticos, las cuales son ellas mismas producto de un contexto socio-histórico, no solo facilitan la actividad de la formación de conceptos, sino definen y le dan forma a la misma. En la ZDP, con el desarrollo de la actividad matemática en interacción social en las cuales representa el objeto en diferentes registros semióticos utilizando para ello los asistentes matemáticos, va analizando las propiedades esenciales que caracterizan el concepto científico a partir de que cada registro semiótico privilegia determinadas propiedades esenciales del objeto.

La mediación semiótica con los asistentes matemáticos promueve la elicitación de los preconceptos, dado que los significados atribuidos a los conceptos por los estudiantes tienden a perdurar, por lo que es necesario atender al mismo durante todo el proceso de perfeccionamiento conceptual. La actividad matemática desarrollada con estos mediadores semióticos posibilita que se produzca la interacción entre, los preconceptos con el sistema de significados y el marco referencial que aporta el concepto científico, iniciando en los estudiantes una transformación hacia el nuevo conocimiento, identificando las limitaciones de sus concepciones y/o no esencialidad de las propiedades atribuidas. La **mediación semiótica** emerge de la interacción que se da en la actividad matemática con los asistentes matemáticos entre la materialización semiótica y la recodificación semiótica.

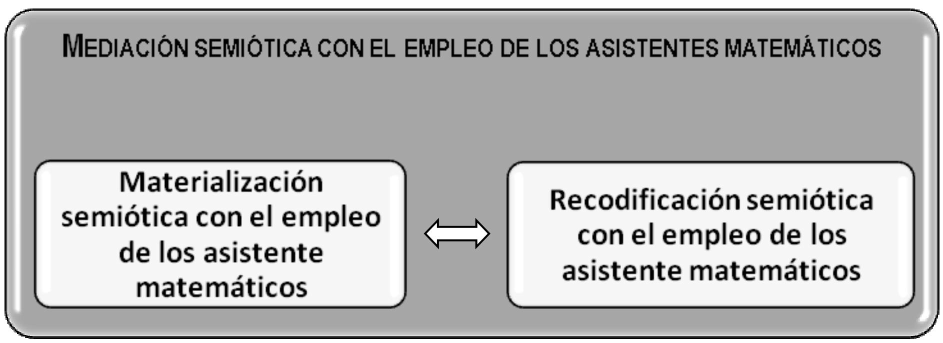


Figura 2.5: Mediación semiótica con el empleo de los asistentes matemáticos

La mediación semiótica que ofrece la actividad matemática soportada por los asistentes matemáticos y la interacción social que en ella se da, contribuye a la **consolidación del nexo símbolo-objeto**. A través de este nexo se posibilita la identificación del concepto en diferentes registros semióticos y se promueve su independización de un registro en particular.

Para lograr el perfeccionamiento de la formación conceptual algebraica en los estudiantes, hay que tomar en cuenta además que, en el caso particular de los objetos algebraicos, es necesario que los estudiantes se apropien de las relaciones dialécticas que superan las contradicciones fundamentales que emanan de la comprensión del Álgebra. Estas son: el carácter singular-general del objeto algebraico, la relación dialéctica variable-parámetro y la relación dialéctica objeto-proceso.

El carácter singular general del objeto algebraico. El objeto algebraico es singular respecto al objeto que representa en un problema particular; puede ser particular cuando represente un modelo con determinadas características, así mismo puede ser general pues representa otros objetos que lo tienen como modelo. Un ejemplo lo constituye el caso del concepto función lineal, el cual puede ser representado tanto de forma analítica como gráfica. Analíticamente la función lineal puede ser interpretada de diversas formas:

- Como un caso particular de una función polinómica $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ de grado n, cuando n=1: $P(x) = a_1 x + a_0$.
- Pero a su vez $P(x) = a_1 x + a_0$ es general respecto a la particularidad del caso que los coeficientes a_1 y a_0 tomen un valor específico, por ejemplo, $a_1=2$, $a_0=1$, obteniéndose la recta cuya ecuación es: $P(x) = 2x + 1$.

Igualmente sucede cuando desde el punto de vista gráfico la representación de la función $y=f_{(x)}$ es precisamente una curva en general:

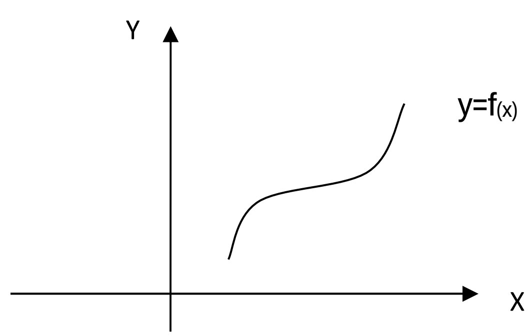


Figura 2.6 Representación gráfica de la función a través de su curva

En este caso el concepto de curva tiene un carácter general, pero cuando la función es lineal $P(x) = a_1x + a_0$, la curva que la representa geométricamente es una línea recta como caso particular de curva.

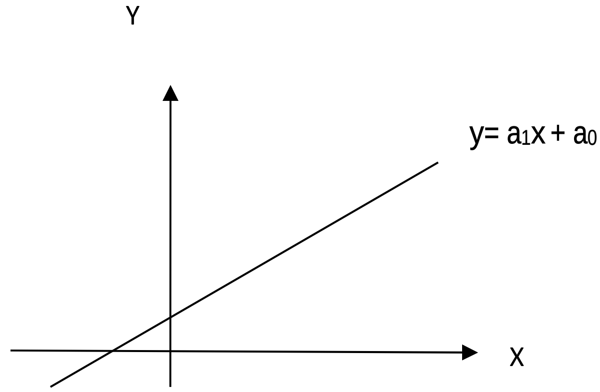


Figura 2.7 Representación gráfica de una función lineal

Cuando se sustituyen los parámetros por diferentes valores numéricos, se obtiene una familia de rectas. Por ejemplo, si se considera $a_1=2$, y se le asignan a a_0 diferentes valores,-1,0, 1, etc. se obtienen una familia de rectas de la función lineal $P(x)= 2x + a_0$.

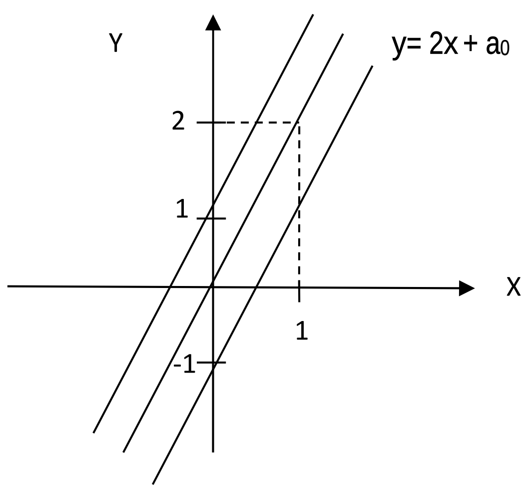


Figura 2.8 Representación gráfica de la familia de rectas $y= 2x + a_0$

Esta dualidad dialéctica no resulta inmediata para el estudiante, no obstante la interpretación adecuada de la misma es fundamental en la construcción y aplicación del conocimiento matemático. El empleo de los asistentes matemáticos resulta conveniente para favorecer la actividad matemática para interpretar el carácter singular general del objeto algebraico, dadas sus potencialidades amplificadoras, que posibilitan la generación de múltiples ejemplos de una situación dada.

La **relación dialéctica variable-parámetro** es otra manifestación de esta relación dual. El parámetro es un medio de generalización su uso hace explícito los diferentes roles que el símbolo puede jugar, por lo que finalmente el parámetro contribuye al uso del símbolo con un mayor grado de generalidad. El parámetro permite representar una clase de fórmulas, una familia de funciones, un haz de gráficos. El uso del parámetro permite generalizar lo que ya es general a una dimensión mayor. Por ejemplo, la función $y = 2x + 1$, representa todos los puntos de la recta, todos los pares ordenados de la función, toda una variedad de fenómenos que responden a dicho modelo, pero mediante el uso del parámetro se obtiene la expresión $y = a_1x + a_0$, que no sólo puede representar la función específica señalada, sino todas las funciones de esta familia.

La generalización usando variables produce cambios sobre las relaciones aritméticas, la variación y generalización de los parámetros produce generalizaciones sobre las relaciones algebraicas. Al trabajar con el concepto de parámetro, el concepto de variable es reconsiderado y profundizado, esto es al desarrollar el concepto de parámetro se tiene una segunda oportunidad para desarrollar el concepto de variable. Como se puede apreciar “el carácter general del objeto algebraico” se amplía (se logra un meta nivel de generalización) cuando su semiótica está dada mediante variables y parámetros. Para destacar esta diferencia, en cuanto al nivel de generalización de las variables, en la Matemática se acostumbra a expresar los parámetros con las primeras letras del abecedario (a, b, c, etc.), mientras que las variables se expresan con las últimas (x, y, z).

Los asistentes matemáticos posibilitan la actividad matemática que propicia caracterizar las variables y parámetros, haciendo objetivas sus diferencias a través del estudio de múltiples ejemplos, que se pueden mostrar con inmediatez a partir de las acciones que realizan los estudiantes con los mismos.

La **relación dialéctica objeto-proceso** es otra relación esencial en el perfeccionamiento de la formación conceptual en los estudiantes. Se da en el hecho de que un concepto matemático generalmente tiene dos dimensiones: una como proceso operacional y otra como objeto matemático. Inicialmente, para el estudiante el aspecto operacional predomina sobre el objetal, por lo cual se requiere desarrollar en el estudiante la habilidad para cambiar de uno a otro (operacional-objetal) cada vez que sea necesario, por ejemplo $f(x) = x^2 + 2$ se aprecia en su forma operacional cuando se ve desde el punto de vista de calcular determinados valores,

$f(3) = 11$, pero se puede ver como un objeto que pertenece a la familia de funciones cuadráticas

$g(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$.

No se puede aspirar a un desarrollo conceptual de los estudiantes en los conceptos algebraicos, si no logran interpretar adecuadamente estas relaciones, por lo tanto la actividad matemática del estudiante se efectuará sobre los objetos algebraicos incluyendo acciones sobre dichas relaciones.

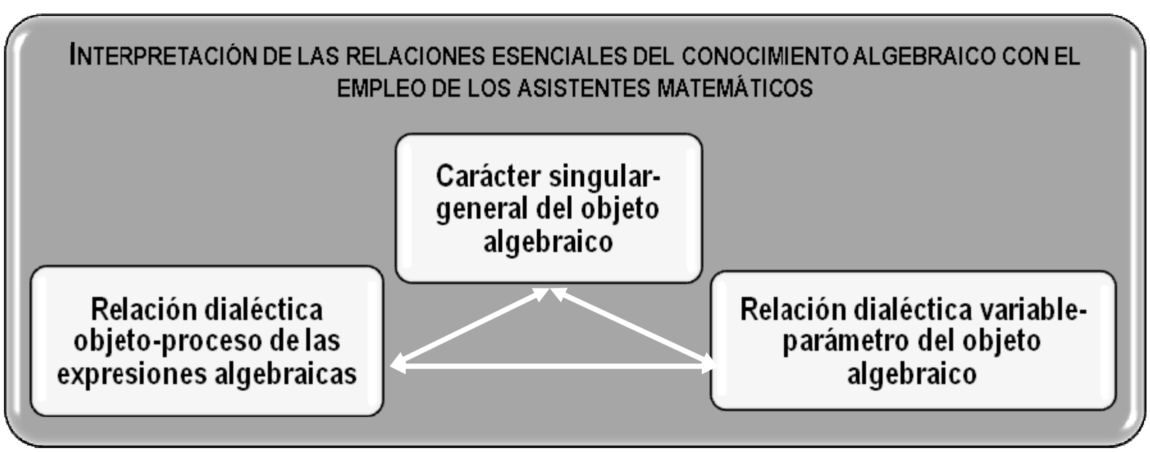


Figura 2.9: Interpretación de las relaciones esenciales del conocimiento algebraico

La realización de la actividad matemática del estudiante sobre los objetos algebraicos en la cual se utilizan los asistentes matemáticos para la mediación semiótica con la inclusión de acciones sobre las relaciones esenciales del conocimiento algebraico es un modo de alcanzar las generalizaciones teóricas e internalizar los conceptos algebraicos. En este subsistema se pueden significar como componentes a la mediación semiótica con los asistentes matemáticos y la interpretación de las relaciones esenciales del conocimiento algebraico.

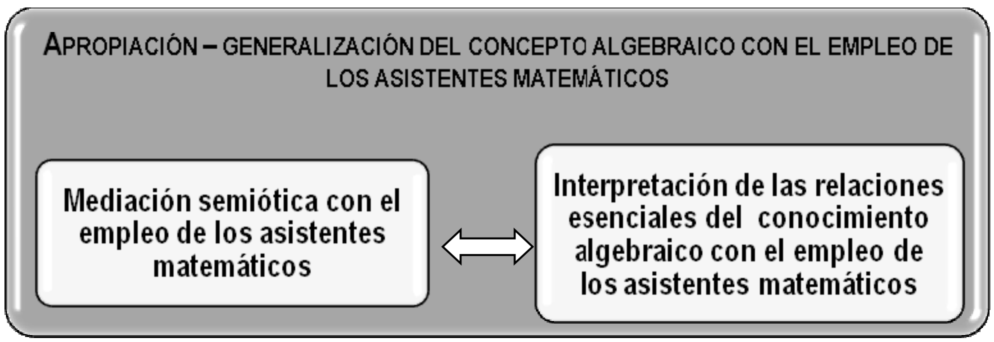


Figura 2.10: Subsistema apropiación-generalización y sus componentes

3. Subsistema: Aplicación de conceptos

El proceso de apropiación de un concepto debe realizarse inseparablemente unido con el proceso de su aplicación práctica. La función de este subsistema es propiciar el perfeccionamiento de la formación conceptual algebraica a través de su utilización práctica en la actividad matemática.

Para ello es imprescindible que el estudiante desarrolle diferentes tipos de actividades matemáticas: de categorización, de sistematización y de aplicación en nuevos contextos a la par que está desarrollando el proceso de formación del concepto, ya que no es posible hablar de la apropiación del concepto si el sujeto no es capaz de utilizar el concepto en alguna aplicación.

La categorización es aquella actividad en la cual el estudiante categoriza, ante situaciones nuevas y no familiares, en ejemplos y no ejemplos del concepto, argumentando cada categorización a partir de los atributos esenciales. En cada ejemplo del concepto el estudiante podrá determinar los atributos esenciales, que son las propiedades que lo definen como tal concepto, y los atributos no esenciales, que son las propiedades que permiten diferenciar un ejemplo de otro.

La sistematización es aquella actividad en la cual se manifiesta la conexión del concepto nuevo con otros conceptos algebraicos, posibilitando la comprensión del carácter sistémico de los conceptos, su interdependencia dentro de la red de conceptos del Álgebra, viabilizándole pasar de un concepto a otro, lo que les confiere mayor aplicabilidad a los mismos en la actividad matemática.

La aplicación de conceptos en nuevos contextos es la actividad matemática que se sustenta en lo que expresa Menchinskaya, citado por González (González, 2005, p.59) “el uso de conceptos, en condiciones no similares a aquellas en que fue aprendido, permite comprenderlo y dominarlo más amplia y correctamente“. La actividad matemática de aplicación de conceptos algebraico en condiciones distintas e independientes a las que fue aprendido propicia al estudiante una mayor comprensión del concepto, a la vez que le sirve para juzgar si lo ha dominado realmente.

En la aplicación de los conceptos se manifiesta también el proceso de elicitación de los preconceptos, debido a que el proceso de formación conceptual es muy complejo y los rasgos atribuidos por los estudiantes a los conceptos tienden a persistir en su actividad matemática.

En este subsistema se pueden denotar como componentes la categorización, la sistematización y la aplicación a nuevos contextos. La actividad matemática desarrollada en la aplicación de los conceptos está sobre las interrelaciones entre estos tres componentes.

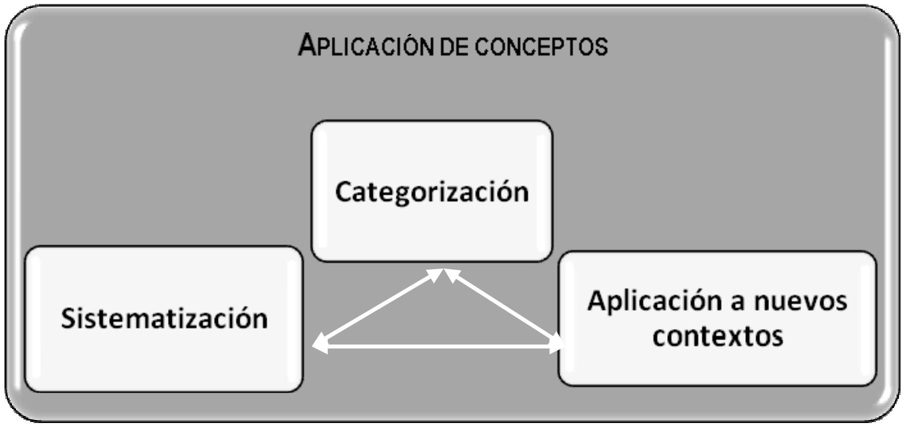


Figura 2.11: Subsistema aplicación de conceptos y sus componentes

Relaciones del modelo.

Las relaciones del modelo emergen como consecuencia de la interacción entre los subsistemas, aunque algunas se manifiesten con mayor relevancia asociadas a un subsistema en particular. Por ejemplo en los tres subsistemas se manifiestan las insuficiencias en el conocimiento previo que tienen los estudiantes como resultado de la paradoja cognitiva del pensamiento matemático, dado que el estudiante en su actividad matemática va elicitando sus conocimientos previos, sin embargo el primer subsistema es donde esta situación se manifiesta en primera instancia, de igual manera es importante resaltar que el proceso de apropiación-generalización coexiste con el proceso de aplicación de conceptos desarrollándose de forma interrelacionada. Para logar la apropiación-generalización es necesario desarrollar la actividad matemática en la cual los estudiantes aplican los conceptos, a su vez en la actividad matemática de aplicación de conceptos se está produciendo la apropiación-generalización del concepto.

Del modelo antes expuesto, emergen las relaciones siguientes:

1. La elicitación de los preconceptos como proceso recurrente en la formación conceptual.

   Los rasgos atribuidos por los estudiantes a los conceptos tienden a persistir. En todo el proceso de formación conceptual al representar los objetos algebraicos en diferentes registros de representación semiótica mediante los asistentes matemáticos posibilita elicitar los preconceptos dados al identificar el objeto con una representación semiótica particular.

2. El perfeccionamiento de la formación conceptual como resultado de la unidad dialéctica entre la apropiación-generalización y la aplicación de los conceptos.

   El perfeccionamiento de la formación conceptual es un proceso dinámico y complejo, que se produce como consecuencia del desarrollo e interrelación de la generalización teórica, la apropiación y la aplicación de conceptos. Estos procesos transcurren a través de la mediación semiótica y la interpretación de las relaciones esenciales del conocimiento algebraico que logra con el empleo de los asistentes matemáticos, propiciando la consolidación del nexo símbolo-objeto.

3. La independencia del concepto algebraico de una semiótica particular y su carácter generalizador emerge como resultado de la relación de interdependencia que se produce entre los subsistemas.

   El sistema se manifiesta como un todo, donde las relaciones entre sus componentes están dadas por la función que realizan en el perfeccionamiento de la formación conceptual. Al producirse la elicitación de los preconceptos de los estudiantes, se produce la apertura al nuevo conocimiento, el cual se forma en la interrelación entre la apropiación-generalización y la aplicación de los conceptos, sustentados estos procesos en los asistentes matemáticos dadas las posibilidades que estos ofrecen como mediadores y generalizadores. Al realizar conversiones entre registros de representación semiótica del objeto con los asistentes matemáticos se pueden destacar las diferentes características del mismo, las cuales son integradas en el concepto que se objetiviza y se independiza así de un registro de representación semiótica particular. A su vez, el desarrollo de la actividad matemática sobre las relaciones fundamentales del Álgebra contribuye a la formación científica del objeto algebraico al asumir su carácter generalizador.

1. La elicitación de los preconceptos como proceso recurrente en la formación conceptual.
2. El perfeccionamiento de la formación conceptual como resultado de la unidad dialéctica entre la apropiación-generalización y la aplicación de los conceptos.
3. La independencia del concepto algebraico de una semiótica particular y su carácter generalizador emerge como resultado de la relación de interdependencia que se produce entre los subsistemas.

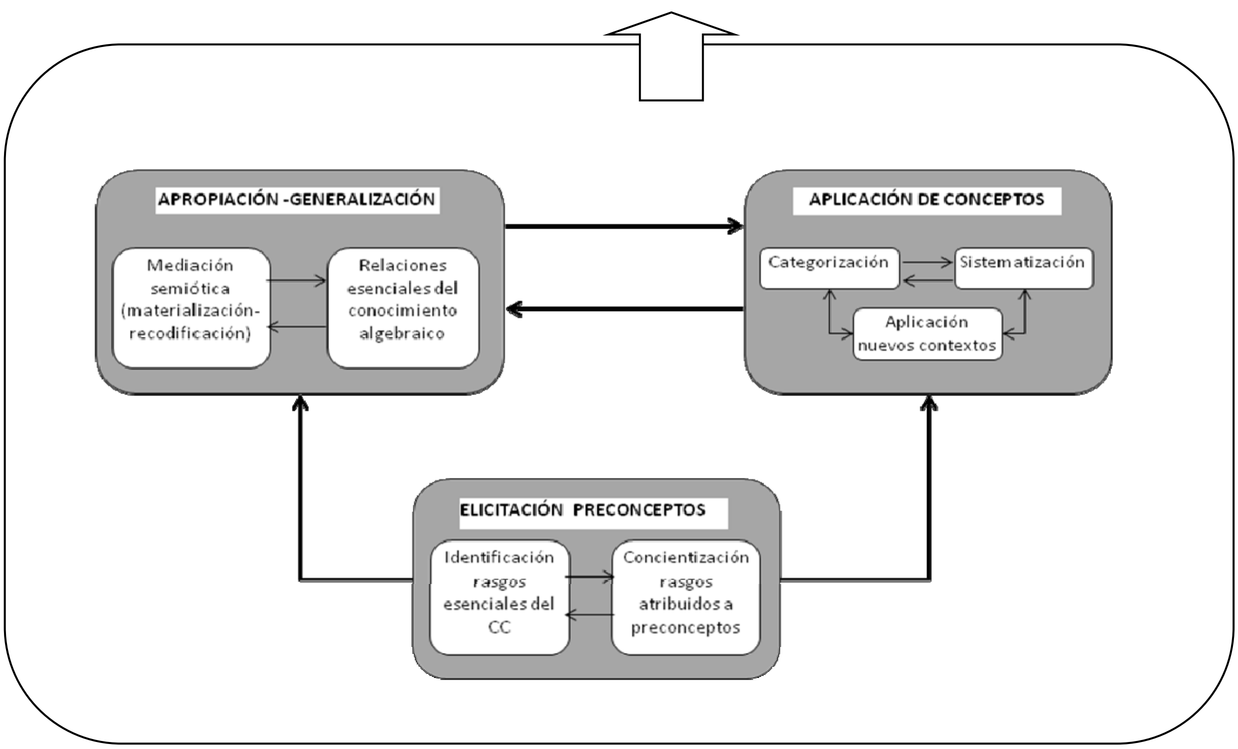


Figura 2.12: Representación del modelo semiótico informático

2.1.3 Características del modelo.

En este modelo se destacan los siguientes rasgos:

a) La mediación semiótica con el empleo de los asistentes matemáticos para la consolidación del nexo símbolo-objeto y lograr la independencia del objeto de un registro semiótico particular.

La representación y tratamiento del concepto en diferentes registros de representación semiótica son necesarias para la consolidación el nexo símbolo-objeto, la correcta formación de este nexo conduce a la comprensión significativa del símbolo, para lo cual se requiere que el estudiante vea en cada semiótica que representa al concepto como objeto matemático, cada uno de los elementos que lo caracterizan. La transferencia entre registros de representación semiótica con los asistentes matemáticos (decodificación y codificación semiótica) para posibilitar la apropiación de cada uno de los elementos esenciales del objeto conceptual, luego al lograr a través de las coordinaciones de los diferentes registros establecer las relaciones que existen entre dichos elemento, se propicia la formación del concepto. La realización de la actividad matemática que promueva la necesidad para buscar y establecer relaciones de coordinación entre conceptos, lo cual es esencial para la compresión de los propios conceptos y la utilización del Álgebra como herramienta matemática.

b) La asunción de las relaciones fundamentales del Álgebra para la formación del carácter generalizador del conocimiento algebraico.

No es posible aspirar a que el estudiante logre generalizar el conocimiento algebraico si no es capaz de interpretar adecuadamente, según un contexto matemático dado, estas relaciones fundamentales del Álgebra. El carácter dialéctico de las mismas provoca dificultades para el estudiante, pues en cada una de estas relaciones: variable-parámetro, carácter singular-general y objeto-proceso; la función del objeto algebraico es circunstancial, por lo que se hace necesario entrenar al estudiante para que sea capaz de interpretar adecuadamente el objeto algebraico según la situación dada, con lo cual se podrá lograr que los estudiante se apropien de un conocimiento algebraico con el grado de generalidad adecuado, que le permita usar este conocimiento apropiadamente en las diferentes situaciones que se les presenten.

2.2 Metodología para el perfeccionamiento de la formación de conceptos algebraicos en estudiantes universitarios con el empleo de los asistentes matemáticos.

La metodología que se presenta tiene el propósito de lograr el perfeccionamiento de la formación de conceptos algebraicos en estudiantes en los temas de Álgebra básica, que se imparten en cursos propedéuticos en la Educación Superior. Este perfeccionamiento está dirigido a que los estudiantes logren la independencia del concepto algebraico de una semiótica particular y se apropien del carácter generalizador del mismo. La autora considera que esta es una vía para contribuir a que los estudiantes apliquen de forma adecuada el Álgebra como herramienta de la Matemática.

En tal sentido se propone una metodología que se sustenta en la consolidación del nexo símbolo-objeto y en la asunción de las relaciones fundamentales del Álgebra, para la formación del carácter generalizador del conocimiento algebraico, con el uso de los asistentes matemáticos. Las relaciones que se derivan del modelo semiótico informático determinan la lógica didáctica del perfeccionamiento de la formación conceptual, la que presupone la existencia de tres fases: elicitación de los preconceptos, apropiación-generalización y aplicación de conceptos, las que son expresión de los procesos requeridos según el modelo para tal fin. El desarrollo de estas fases está contenido en la metodología que se propone, instrumentando su aplicación en el proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra básica.

La metodología propuesta consta de: objetivo general, requerimientos para su implementación, características fundamentales y etapas.

Objetivo general:

Contribuir al perfeccionamiento de la formación de conceptos algebraicos en los estudiantes universitarios que reciben esta asignatura como curso propedéutico.

Requerimientos para la implementación de la metodología:

- Preparación de los profesores para desempeñarse no sólo como dirigente del proceso de enseñanza-aprendizaje, sino como un orientador o guía de éste, y esto implica, dejar que los estudiantes asuman parte de responsabilidad en su aprendizaje.
- Motivación de estudiantes y profesores por la actividad que realizan.
- Disposición de los profesores a aceptar los posibles cambios en su quehacer profesional, incluido como imprescindible su preparación teórica y práctica en el contenido y manejo de algunos asistentes matemáticos.
- Existencia y condiciones de los recursos materiales, en especial, de los medios de enseñanza que se proponen (contar con laboratorios de computación o calculadoras con el asistente matemático propuesto)
- Disposición de recursos alternativos, entre los cuales decide utilizar, en función de las demandas del proceso, aquellos que cree adecuados. Sin una variedad de recursos no es posible actuar de modo estratégico.

Características fundamentales:

- En la metodología se considera la concepción del aprendizaje como un proceso activo, en la que subyace la aplicación de actividades en conjunto, que fomentan el intercambio de ideas, valoraciones y experiencias entre los estudiantes, a través del empleo de los asistentes matemáticos.
- Propone al estudiante un conjunto de tareas para desarrollar su actividad cognoscitiva en aras del perfeccionamiento de la formación conceptual, logrando así la generalización del concepto para que pueda usarse como herramienta de la Matemática.
- Las tareas se ejecutan siguiendo la lógica didáctica del perfeccionamiento de la formación conceptual que establece las fases de elicitación de preconceptos, apropiación-generalización y aplicación de conceptos sustentada en la consolidación del nexo símbolo-objeto y en la asunción de las relaciones fundamentales del Álgebra para la formación del carácter generalizador del conocimiento algebraico, con el empleo de los asistentes matemáticos.
- La consolidación del nexo símbolo-objeto se lleva a cabo a través de la materialización y recodificación semiótica mediante la conversión de diferentes registros de representación semiótica con el empleo de los asistentes matemáticos.
- La asunción de las relaciones fundamentales del Álgebra para la formación del carácter generalizador del conocimiento algebraico se desarrolla mediante la interpretación y aplicación del carácter singular-general del objeto algebraico, la relación dialéctica objeto-proceso y la relación dialéctica variable-parámetro con el empleo de los asistentes matemáticos.
- Posee un diseño suficientemente flexible, en cuanto posibilita la adecuación de las tareas a desarrollar según el conocimiento inicial de los estudiantes y la disponibilidad de recursos

(temporales y tecnológicos).

Etapas de la metodología

La metodología cuenta con el desarrollo de tres etapas: diagnóstico, planificación y ejecución, las que serán descritas a continuación:

PRIMERA ETAPA: Diagnóstico de la formación conceptual de los estudiantes universitarios relativa al Álgebra básica.

Objetivos:

- Obtener criterios acerca de los conocimientos, preconceptos y además, detectar a los estudiantes con más dificultades y a los que poseen más posibilidades. Estos últimos pueden ser aprovechados por el profesor en el desarrollo de las situaciones de aprendizaje con la finalidad de promover exitosamente la actividad.
- Jerarquizar las principales deficiencias detectadas para poder determinar las tareas a realizar en cada fase de la etapa de ejecución.

Acciones fundamentales:

1. Selección y/o elaboración del instrumento para la realización del diagnóstico, teniendo en cuenta los conceptos fundamentales del Álgebra básica en el curso.
2. Aplicación del instrumento seleccionado y/o elaborado a los implicados.
3. Análisis de los principales resultados obtenidos acerca de la aplicación del instrumento, en relación a preconceptos, estudiantes con deficiencias y estudiantes aventajados.
4. Identificación de conceptos mal formados por los estudiantes en cursos precedentes.
5. Jerarquización de las deficiencias detectadas.

Consideraciones metodológicas:

- La realización de las acciones de esta etapa será llevada a cabo por el profesor de la asignatura para garantizar la interpretación de los resultados de la aplicación del instrumento a los estudiantes.

- Para desarrollar esta actividad se realizará una clase tipo “mixta” que persiga dos objetivos: realizar la prueba diagnóstica y entrenar a los estudiantes en el uso del Derive.
- Se requiere el procesamiento detallado de los resultados para la determinación de los preconceptos que tienen los estudiantes del tema que se imparte.
- Para la jerarquización de las deficiencias es conveniente revisar los exámenes de cuatrimestres anteriores y otras fuentes de información (bibliografía especializada digital y/o impresa).

SEGUNDA ETAPA: **Planificación de las tareas a desarrollar según la lógica didáctica del perfeccionamiento de la formación conceptual.**

Objetivo: Planificar las tareas por unidades teniendo en cuenta las fases de elicitación de preconceptos, apropiación-generalización y aplicación de conceptos, las tipologías donde se van a realizar las situaciones de aprendizaje, el momento y la forma de evaluar, en función de las dificultades y potencialidades detectadas.

Acciones fundamentales:

1. **Seleccionar los conceptos a perfeccionar en la unidad**, así como aquellas características esenciales que se han identificado que tienen mayor incidencia en los problemas conceptuales de los estudiantes.
2. **Planificar las tareas y delimitar las fases de la conceptualización**:
   A. La lógica didáctica del perfeccionamiento de la formación conceptual presupone la existencia de tres fases del proceso: elicitación de preconceptos, apropiación-generalización y aplicación de conceptos. A cada fase le corresponde un conjunto de tipos de tareas, cuya planificación a lo largo de la unidad será precisada por el profesor

en función del objetivo de la unidad, los conceptos a perfeccionar, las características del grupo, los preconceptos y dificultades diagnosticadas y el tiempo que se dispone para el desarrollo de la unidad.

B. Atendiendo a las fases, los tipos de tareas que deben planificarse para ser desarrolladas haciendo uso de los asistentes matemáticos son:

Tabla 2.1 Fases y tipos de tareas

Fases	Tipos de tareas	Objetivo
Elicitación de los preconceptos	Tareas para elicitar el estado del conocimiento algebraico que poseen los estudiantes.	Develar los preconceptos y promover la motivación intrínseca hacia el concepto teórico.
Apropiación-generalización	Tareas de materialización en diferentes registros de representación semiótica.	Identificar e interpretar los rasgos esenciales de los conceptos obtenidos a partir de la multiplicidad de registros semióticos.
	Tareas de recodificación entre registros de representación semiótica	Realizar la coordinación entre registros semióticos para la objetivación de los conceptos.
	Tareas de apropiación de las relaciones del Álgebra	Interpretar las relaciones objeto-proceso, variable-parámetro y el carácter singular-general del objeto algebraico.
Aplicación de conceptos	Tareas de categorización	Categorizar situaciones nuevas en ejemplos y no ejemplos del concepto .y argumentar.
	Tareas de sistematización	Relacionar el concepto nuevo con otros conceptos algebraicos conocidos.
	Tareas de aplicación en nuevos contextos	Aplicar el concepto en situaciones nuevas.

A continuación se ejemplifican algunos tipos de tareas que se plantean en la metodología (Anexo 11), las cuales pueden formularse de forma integrada.

- Tareas de materialización y recodificación semiótica

En este tipo de tarea se fusionan la representación, tratamiento y coordinación de registros semióticos. A partir de la representación y tratamiento de conceptos matemáticos en los registros algebraico y gráfico que proporciona el asistente matemático, se identifican rasgos esenciales de los conceptos estudiados. El análisis semiótico comparativo entre la representación en el registro algebraico, con la representación en el registro gráfico posibilita la coordinación entre unidades significantes.

Ejemplo de tarea en el tema de "Funciones".

Es necesario que los estudiantes interioricen la necesidad de identificar los valores para los cuales una función no está definida, o en otras palabras determinar el dominio ya que se requiere para que los estudiantes puedan usar las funciones en su carácter de componentes esenciales del lenguaje matemático. Por lo cual se hace necesario plantear tareas como las siguientes:

Tarea: Dada una función representada en el registro algebraico, se le pide al estudiante que:

a. Determina analíticamente el dominio de la función.
b. Represente gráficamente la función utilizando un asistente matemático.
c. Describa las características del gráfico representado en pantalla e identifica cuál de ellas se corresponde con el dominio obtenido analíticamente.

- Tareas de apropiación de las relaciones del Álgebra

Para comprender las relaciones esenciales del Álgebra se requiere hacer un trabajo interactivo con el asistente matemático de modo que el estudiante pueda apreciar la influencia de cada uno de estos elementos en el objeto matemático.

Ejemplo de la relación dialéctica variable-parámetro

Una actividad ilustrativa de la relación dialéctica variable-parámetro al respecto es la representación de familias de gráficos de curvas de distintos tipos, formuladas a través de variables y parámetros, y lo que se quiere es interpretar la influencia de las variables y parámetros en los gráficos de dichas curvas, a través de las siguientes preguntas:

Tarea: Un ejemplo pudiera ser la familia de rectas $y= ax + b$ y la de parábolas

$y= ax^2 + bx + c$.

a) Asignar valores a los parámetros. Mientras varía uno mantenga los restantes constantes. Incluya valores positivos, negativos y nulo.
b) Representarlo gráficamente para cada valor de parámetros utilizando el asistente matemático.
c) Identificar el comportamiento de las curvas de acuerdo a la variación de cada parámetro.
d) Asignar valores a la variable “x” (positivos, negativos y nulo). Evaluar la función si $a=2$, $b=1$ y $c=4$
e) Represente los valores obtenidos en una tabla y grafíquelos manualmente.
f) Compare el efecto en los gráficos producidos por las variaciones entre los parámetros y las variables.

- Tareas de sistematización

Este tipo de tareas posibilita la comprensión del carácter sistémico de los conceptos y el análisis de su interdependencia dentro de la red de conceptos del Álgebra, posibilitando pasar de un concepto a otro lo que contribuye a su aplicabilidad en la actividad matemática.

Ejemplo de tarea del tema "Ecuaciones de segundo grado".

En este tipo de tarea se establecerá la conexión entre las ecuaciones de segundo grado, los conceptos de variable-parámetro y las inecuaciones. El estudiante debe interiorizar el concepto de solución de una ecuación e interpretar correctamente la relación variable–parámetro, para estar en condiciones de usar el Álgebra para realizar la tarea propuesta.

Tarea: Dada la ecuación: $x^2 - 4x + k = 0$,

a. Determinar cuáles deben ser los valores de "k" para que la ecuación tenga raíces reales.
b. Una vez resuelto el problema analíticamente comprobar el resultado gráficamente con el asistente matemático.

Orientaciones: Puede asignarle valores arbitrarios a "k" y graficarlo con el asistente matemático para estudiar qué sucede, utilizando esta información como orientación en el proceso de solución analítica del problema.

Al identificar los valores de "k" pedidos no se tiene la solución de la ecuación dada, sino una familia de ecuaciones de 2do. grado con raíces reales, lo cual caracteriza la función del parámetro, lo cual el estudiante debe distinguir del hecho de encontrar valores de la variable, que son soluciones de la ecuación en particular, aquí también está presente el carácter singular y general de objeto algebraico, dado que $x^2 -4x + k = 0$ es singular como objeto algebraico y a su vez representa toda una variedad de ecuaciones con determinados elementos comunes. Además como para que la ecuación tenga raíces reales tiene que ser 16 – 4k ≥ 0 se interrelaciona este tema con el de inecuaciones, cuya solución nos da k ≤ 4. Es formativo que el estudiante genere diferentes ecuaciones de acuerdo a la restricción del parámetro y las resuelva con el asistente matemático, no tanto por la comprobación de su resultado en sí, sino para que pueda apreciar la función del parámetro en contraposición a los valores de la variable.

- Tareas de aplicación en nuevos contextos

Este tipo de tareas se realizan con el objetivo de evitar el trabajo reproductivo de los estudiantes y contribuir a la formación del concepto. Son importantes los ejercicios donde el estudiante tenga que considerar diferentes alternativas, como es el caso de los sistemas de ecuaciones con ecuaciones modulares.

Tarea: Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$a)\begin{cases} \left|\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right| = 2 \\ 4x+3y = xy \end{cases}$ b) $\begin{cases} |x-1| + (y-2) = 3 \\ (x-1) + |y-2| = 0 \end{cases}$

C. En las clases prácticas los estudiantes resolverán ejercicios donde aplicarán los conceptos tratados en la unidad. Estas clases se pueden desarrollar con o sin el asistente matemático, pues su objetivo está dirigido al desarrollo de las habilidades manuales de operaciones algebraicas de los estudiantes.

3. Planificar tipos de clases en correspondencia con los objetivos de la unidad. Atendiendo a lo expresado anteriormente, y tomando en cuenta que es necesario establecer una nueva secuencia para la enseñanza de los conceptos y su aplicación en las clases de Álgebra, y además que muchas de las tareas a desarrollar serán realizadas por los estudiantes con los

asistentes matemáticos, se hace necesario proponer las siguientes características de los tipos de clases:

- Conferencia interactiva: la conferencia interactiva es el tipo de clase que tiene como objetivo fundamental que los estudiantes develen los preconceptos que poseen sobre los conceptos fundamentales de la unidad, a partir del reconocimiento de los rasgos esenciales de los conceptos científicos. Este proceso se da a través de la interacción entre las explicaciones del profesor, las tareas que desarrollan con los asistentes matemáticos y el diálogo entre los estudiantes. Para su concepción se reducirá el contenido teórico expuesto por el profesor, para incorporar tareas de elicitación de preconceptos con los asistentes matemáticos donde los estudiantes interactúan con objetos matemáticos en diferentes registros semióticos, confrontan con otros estudiantes sus concepciones y perciben las insuficiencias de las mismas, provocando la necesidad de modificarlas.
- Taller: El taller es el tipo de clase que tiene como objetivo fundamental la formación de los conceptos algebraicos a partir de la actividad matemática que los estudiantes realizan con los asistentes matemáticos interactuando entre si. En este tipo de clase se promoverá entre los estudiantes, y entre estos y el profesor, la confrontación, discusión y colaboración al realizar tareas de apropiación-generalización y de aplicación de conceptos, con el empleo de los asistentes matemáticos. Entre las tareas a desarrollar están, las tareas de materialización en diferentes registros de representación semiótica, de recodificación entre registros de representación semiótica, de apropiación de las relaciones del Álgebra, de categorización, de sistematización y de aplicación en nuevos contextos.

- **Clases prácticas:** Este es el tipo de clase que tiene como objetivo que los estudiantes desarrollen habilidades operacionales algebraicas. Estas se desarrollarán con o sin el empleo de los asistentes matemáticos y en las mismas se promoverá la interacción entre los estudiantes y entre estos y el profesor.

Las actividades docentes se desarrollarán en condiciones que garanticen que los estudiantes puedan trabajar con el asistente matemático cuando así se requiera en pequeños grupos.

4. **Planificar actividades de evaluación de la actividad del estudiante.** En cada uno de estos tipos de clases se realizan actividades de evaluación con vistas a ir valorando el desarrollo del perfeccionamiento de la formación conceptual, retroalimentar el proceso y establecer las correcciones y adecuaciones necesarias para su desarrollo.

Esta valoración toma en cuentas las concepciones de Pérez (2007) relativas a que la evaluación del aprendizaje debe estar basada en el propio sistema de tareas con que se desarrolla el perfeccionamiento de la formación conceptual, teniendo en cuenta las fases de este proceso y que la misma se debe orientar hacia la búsqueda de un efecto sinérgico resultante, el que consistirá en este proceso en la independencia del concepto de una representación semiótica particular y en la asunción del carácter generalizador del conocimiento algebraico.

Además deben desarrollarse durante todo el curso exámenes parciales para valorar los resultados alcanzados y lo que falta por formar, así como realizar un examen final para cuantificar los resultados alcanzados. Las evaluaciones se orientarán hacia el aparato conceptual del Álgebra básica, el cumplimiento de los objetivos instructivos concebidos desde los contenidos del programa y el empleo del Álgebra como herramienta en las aplicaciones matemáticas. La evaluación consistirá en una valoración de los resultados obtenidos en los controles sistemáticos, parciales y finales que posibilite determinar el grado del cumplimiento de los objetivos.

Consideraciones metodológicas:

- La planificación del proceso requiere que se tome en cuenta la necesidad de preparar al estudiante en el uso del asistente matemático. Por tanto hay que concebir en las primeras unidades algunas clases que permita familiarizarse con el ambiente del asistente matemático que será usado para poder utilizar eficazmente el mismo.
- Se debe tener en cuenta que los estudiantes deben adquirir habilidades operacionales algebraicas manuales, por lo tanto, la planificación de tareas debe tomar en cuenta el desarrollo de tareas a lápiz y papel.

TERCERA ETAPA: Ejecución.

Objetivo: Concretar de manera eficiente y efectiva lo planificado, lo que implica tomar en cuenta la lógica didáctica del perfeccionamiento de la formación conceptual, transitando por las fases de elicitación, apropiación-generalización y aplicación de conceptos.

Acciones fundamentales:

1. La fase de elicitación se desarrollará durante la(s) conferencia(s) interactiva(s) de cada unidad. Como los contenidos tratados en el curso ya han sido abordados en la enseñanza precedente, la metodología a emplear se sustenta en una participación activa de los estudiantes la cual adopta una variante del método Peer Instruction (Mazur, 2002).

   Como actividad preparatoria los estudiantes deben leer el contenido antes de la clase. La conferencia se estructura tomando en cuenta los conceptos esenciales a tratar en la misma. En la misma se alternan breves presentaciones sobre esos contenidos con tareas de elicitación para revelar las dificultades comunes conceptuales. Los estudiantes deben resolverlas utilizando los asistentes matemáticos y para ello deben trabajar en pequeños grupos (2 a 3) para valorar las respuestas. El profesor circula entre los estudiantes para promover discusiones productivas y para dirigir su pensamiento Después de varios minutos de la discusión de los pequeños grupos, solicita la respuesta de la tarea. Posteriormente explica la respuesta correcta y, dependiendo de las respuestas de los estudiantes, puede plantear otra tarea relacionada o abordar un nuevo contenido. Este método promueve la actividad intelectual del estudiante de forma continua durante la conferencia y proporciona retroalimentación continua al profesor y estudiantes del nivel de comprensión de los conceptos tratados.

2. Las fases de apropiación-generalización y de aplicación de conceptos se llevarán a cabo en los talleres, desarrollándose las mismas de forma coordinada. Aquí los estudiantes enfrentarán tareas cuya solución requiere de la apropiación y aplicación de los conceptos; y de la adecuada interpretación de características esenciales del Álgebra como la relación dialéctica objeto - proceso, variable-parámetro y carácter singular-general del Álgebra.
3. Para lograr los objetivos trazados en la fase de apropiación-generalización el profesor debe seleccionar las tareas de forma que posibiliten representar los objetos en un registro semiótico para estudiar sus características esenciales, tratar las representaciones obtenidas al interior de un registro establecido, (esto incluye utilizar diferentes representaciones dentro de un mismo registro) y de convertir las representaciones de un registro a otro. La conversión se hará fundamentalmente entre el lenguaje natural, el algebraico y el gráfico. El asistente matemático se utilizará para tratar los registros algebraicos y gráficos. Esta conversión posibilita establecer una articulación coherente entre las representaciones del concepto en cuestión.
4. En la fase de aplicación de conceptos, el profesor debe seleccionar tareas que posibiliten hacer

un proceso de categorización, para identificar los conceptos y no conceptos. Dado el hecho, como describe Vigotsky (1986) que un concepto es parte de un sistema de representación que vincula conceptos de diferente jerarquía, es necesario que el profesor incluya tareas de sistematización que establezcan los vínculos entre el concepto nuevo y los conocidos por el estudiante. Por último, el profesor debe proporcionar a los estudiantes tareas de aplicación a nuevos contextos y de establecimiento de relaciones funcionales para consolidar la formación de los nuevos conceptos.

5. La metodología a emplear se sustenta en la realización de tareas en pequeños grupos (dúos y tríos), con el empleo de los asistentes matemáticos en las cuales van a resolver ejercicios de diferentes tipos correspondientes a las fases mencionadas. El profesor inicialmente orientará la actividad que se va a desarrollar en los talleres, la cual se estructurará en dos partes: en la primera los estudiantes realizarán las tareas con el empleo de los asistentes matemáticos y en la segunda se propiciará un debate sobre los conceptos tratados. Durante su ejecución el profesor intercambiará con los estudiantes, atendiendo a las dificultades derivadas de las insuficiencias de su formación conceptual. El mismo irá evaluando las tareas durante su realización de forma individual y por grupos de trabajo. Al concluir los talleres realizará un resumen sobre los conceptos tratados y las características develadas que contribuyen al perfeccionamiento del concepto.

Consideraciones metodológicas

- En la fase de ejecución es importante tener en cuenta al desarrollar las tareas que es necesario hacer una correcta selección de los pequeños grupos de trabajo, pues estos deben estructurarse en correspondencia con las características individuales de los estudiantes, sus necesidades de aprendizaje y sus habilidades con el asistente matemático. El profesor debe tener en cuenta los elementos determinados en el diagnóstico.

- Los estudiantes deben representar el objeto en la multiplicidad de registros semióticos y operar con los mismos, pudiendo utilizar diferentes representaciones. Deben realizar la conversión entre los registros, todo lo cual contribuye a una mayor comprensión del significado del símbolo, así como la síntesis de estos significados en la comprensión del objeto.
- En necesario destacar que en el proceso de conversión entre registros semióticos los estudiantes cometen errores. Las causas profundas de los errores hay que buscarlas en la no congruencia entre sistemas semióticos, la cual revela una carencia de coordinación (capacidad para reconocer dos representaciones distintas como representaciones de un mismo objeto) entre dichos sistemas. La no congruencia puede deberse a un fenómeno de compartimentación entre los sistemas de representación.
- Para atender a tal problemática es necesario que el estudiante utilice paralelamente varias representaciones y las relacione entre si, empleando el asistente matemático. Debe en esta tarea identificar las unidades significantes a través de observar y comparar las variaciones que se producen simultáneamente en los registros algebraicos y gráficos. Para ello deben proponerse actividades en las que se hagan variar sistemáticamente las unidades significantes de la representación del registro algebraico (registro de partida), y observar e identificar las variaciones producidas en la representación del registro gráfico (registro de llegada). La conversión del registro gráfico al registro algebraico es más compleja, por lo que debe realizarse posterior a la conversión algebraica–gráfica. En el registro algebraico las unidades significantes estarán dadas por las variables y parámetros de las expresiones

algebraicas, mientras que en el registro gráfico estas unidades significantes se identificarán a partir de variables visuales. Por último, en el debate del taller, se discute la integración entre dichas representaciones, lo cual supone una síntesis de los vínculos, relaciones y propiedades comunes que desemboca en el concepto abstracto.

- Se debe ir de lo más simple a lo más complejo para resolver las tareas; para ello los estudiantes deben responder a preguntas y a su vez hacerlas, formar los conceptos a partir de ir abstrayendo e interpretando sus rasgos esenciales y establecer relaciones funcionales de forma ascendente, para lo cual vinculan las diferentes semióticas (literal, algebraica, gráfica, pictórica), utilizando diferentes recursos didácticos (libros de texto, asistente matemático y otros materiales complementarios).
- Es muy importante que el profesor verifique el trabajo que ejecutan los estudiantes, propicie el intercambio entre los mismos, estimule su metaconocimiento y autorregulación como vía de ir contrastando los conceptos científicos con las concepciones que estos poseen, para identificar y corregir sus limitaciones y/o no esencialidad de las propiedades atribuidas a los objetos.

Conclusiones parciales del capítulo.

1. Las consideraciones teóricas que emergen de la valoración de diferentes fundamentos epistemológicos, psicológicos y didácticos, se dirigen a la elaboración de un modelo semiótico informático, el cual ha permitido revelar las relaciones esenciales entre los procesos que lo integran, lo que conduce a las fases de elicitación de los preconceptos, apropiación-generalización y aplicación de conceptos, desarrolladas con el empleo de los asistentes matemáticos, las cuales enriquecen la visión didáctica de la interpretación del proceso de perfeccionamiento de la formación de conceptos algebraicos en estudiantes universitarios.

2. A partir de revelar las relaciones esenciales que se establecen entre estas fases, se derivan las regularidades esenciales que indican la vía para el proceso del perfeccionamiento de la formación conceptual de los estudiantes, lo cual posibilita la concreción del modelo en una metodología.
3. Se alcanza un estadio superior de perfeccionamiento de la didáctica de la formación conceptual del Álgebra básica, lo que ha permitido revelar una lógica didáctica, expresión de las relaciones y regularidades del modelo y que, desde sus principios de la actividad práctica con herramientas semióticas para la materialización y recodificación semiótica y de la interpretación de las relaciones dialécticas del Álgebra (singular-general, objeto-proceso, variable-parámetro) se concreta en una metodología para el perfeccionamiento de la formación conceptual.
4. La metodología propuesta para implementar la concepción teórica encaminada al desarrollo del perfeccionamiento de la formación conceptual de los estudiantes en el Álgebra básica consta de tres etapas enmarcadas en: diagnóstico de la formación conceptual de los estudiantes universitarios relativa al Álgebra básica, planificación de las tareas a desarrollar según la lógica didáctica del perfeccionamiento de la formación conceptual y la etapa de ejecución.

CAPÍTULO III: VALORACIÓN DE LOS RESULTADOS CIENTÍFICOS ALCANZADOS

Introducción

En este capítulo se procede a la aplicación del método de criterio de expertos para corroborar el valor científico-metodológico del modelo semiótico informático y la metodología propuesta. Además se exponen los resultados de la realización de un pre-experimento pedagógico formativo en el Álgebra Universitaria a través del cual se implementó la metodología, donde se determinó la efectividad preliminar de la misma.

3.1. Valoración de los resultados de la aplicación del método de criterio de expertos.

Para determinar el valor científico-metodológico del modelo semiótico informático y la metodología que se sustenta en el mismo, se utilizó el método de criterio de expertos (variante Delphi) el cual permitió enriquecer y perfeccionar la propuesta elaborada así como, confirmar el valor científico-metodológico del modelo semiótico informático y la metodología propuesta. Se emplearon, además, técnicas estadísticas para procesar e interpretar los resultados de la aplicación del método utilizado.

A. Determinación de los expertos.

Se seleccionaron 32 especialistas a los que se les envió un cuestionario para determinar el nivel de competencia que poseían sobre la temática que se investiga (Anexo 12). Fueron tomados en consideración, los siguientes aspectos:

- Experiencia profesional en la actividad universitaria.
- Años de experiencia profesional en la enseñanza de la Matemática.

- Categoría científica.
- Categoría docente.
- Información que posee en relación con la problemática tratada en la investigación.

Se recibieron respuesta de 30 especialistas, los cuales fueron valorados según la metodología para determinar si podían considerarse o no expertos. De acuerdo a la metodología utilizada, en la obtención del coeficiente de conocimiento (Kc) se multiplicó por 0.2 la valoración dada por cada experto en la escala sobre el conocimiento que poseía de la temática. La determinación de Kc arrojó los siguientes resultados:

Tabla 3.1: Resumen del Kc

Coeficiente de conocimiento	1	0.8	0.6	0.4	0.2
Cantidad de personas	13	8	7	2	-

Para esta valoración se considera como coeficiente de conocimiento:

- Alto → $0.8 \leq Kc \leq 1$
- Medio → $0.6 < Kc \leq 0.8$
- Bajo → $Kc < 0.6$

En tal sentido, en la población de expertos evaluada, 21 presentaron un Kc alto (70,00 %), siete un Kc medio (23,33 %) y dos un Kc bajo (6,66 %).

La determinación del coeficiente de argumentación (Ka) se sistematiza a continuación:

Tabla 3.2: Resumen del Ka

Coeficiente de argumentación	1	0.9	0.8	0.7	0.5	0.4
Cantidad de personas	18	9	3	-	.	-

Para la determinación de los criterios de alto, medio y bajo se utilizó la escala del coeficiente de conocimiento. De estos resultados se puede inferir que los 30 (100%) encuestados tienen un coeficiente de argumentación alto, al ser su puntuación igual o mayor a 0.8.

Para determinar el coeficiente de competencia (K), a partir de la integración de los resultados anteriores se aplicó la fórmula siguiente: K = ½ (Ka + Kc). (Anexo 13). Como resultado de la aplicación de este procedimiento se obtuvo que 25 de los encuestados posen un nivel de competencia alto (83,33 %) y cinco medio (16.67 %). El criterio a seguir para la selección de los expertos fue considerar aquellos que tuvieran un coeficiente alto o medio, por tanto la totalidad de los encuestados cumplió con este criterio, siendo seleccionados los 30 encuestados como expertos.

A continuación se refleja en una tabla los expertos por países e instituciones.

Tabla 3.3: Expertos por país e instituciones

No	País	Instituciones
12	Cuba	Universidad de Camagüey (UC) Universidad de Ciencias Informáticas (UCI) Institito Superior Politécnico José Antonio Echeverría (ISPJAE)
9	República Dominicana	Universidad APEC (UNAPEC) Universidad Autónoma de Santo Domingo (UASD) Universidad Iberoamericana (UNIBE) Universidad Tecnológica de Santiago (UTESA)
6	México	Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA-IPN) Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL)
1	Argentina	Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME)
1	Colombia	Universidad de la Sabana (US)
1	España	Universidad de Granada (UG)

B. Valoración del modelo y la metodología.

Se elaboró una escala para efectuar la valoración integral del modelo y de la metodología destinada a perfeccionar la formación de conceptos algebraicos de estudiantes universitarios que aparece en el Anexo 12. Para la valoración de los expertos, se incluyeron los siguientes atributos o indicadores:

1. Influencia de la materialización con el empleo de las TIC para la consolidación del nexo símbolo-objeto matemático en el perfeccionamiento conceptual.
2. Influencia de la transferencia entre registros semióticos para la generalización en el perfeccionamiento conceptual.
3. Influencia de las relaciones dialécticas objeto-proceso, variable-parámetro y el carácter singular-general del objeto matemáticos en el aprendizaje conceptual del Álgebra.
4. Pertinencia del modelo semiótico informático que sustenta la metodología para el perfeccionamiento de conceptos algebraicos de estudiantes universitarios con el empleo de los asistentes matemáticos.
5. Correspondencia entre el modelo (concepción teórica) y la metodología (instrumento).
6. Planificación de los tipos de clases en correspondencia con las fases del proceso.
7. Correspondencia entre los tipos de tareas y las fases del proceso.
8. Contribución de la metodología a mejorar la efectividad de los estudiantes universitarios en el empleo del Álgebra como herramienta en aplicaciones matemáticas.

Para evaluar los aspectos descritos se utilizaron cinco categorías:

Tabla 3.4: Categorías para la evaluación

C1	Muy adecuada	5 puntos
C2	Adecuada	4 puntos
C3	Poco adecuada	3 puntos
C4	Inadecuada	2 puntos
C5	Sin opinión	1 punto

A continuación se resumen los resultados para cada categoría según la opinión de los expertos encuestados.

Tabla 3.5: Matriz de frecuencias

Indicadores	C1	C2	C3	C4	C5	TOTAL
I_1	27	3	0	0	0	30
I_2	24	6	0	0	0	30
I_3	19	11	0	0	0	30
I_4	19	10	1	0	0	30
I_5	21	8	1	0	0	30
I_6	23	7	0	0	0	30
I_7	18	12	0	0	0	30
I_8	23	7	0	0	0	30
TOTAL	174	64	2	0	0	240

Con los resultados de la Tabla 3.5 se obtuvieron los valores de frecuencias acumuladas para cada uno de los indicadores evaluados. Seguidamente se obtuvo una tabla similar, donde se resumen los resultados de los valores de frecuencia relativa acumulativa para los indicadores que están siendo evaluados.

Tabla 3.6: Matriz de frecuencias acumuladas

Indicadores	C1	C2	C3	C4	C5
I_1	27	30	30	30	30
I_2	24	30	30	30	30
I_3	19	30	30	30	30
I_4	19	29	30	30	30
I_5	21	29	30	30	30
I_6	23	30	30	30	30
I_7	18	30	30	30	30
I_8	23	30	30	30	30
TOTAL	174	238	240	240	240

Tabla 3.7: Matriz de frecuencias relativas acumuladas

Indicadores	C1	C2	C3	C4	C5
I_1	0,9000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
I_2	0,8000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
I_3	0,6333	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
I_4	0,6333	0,9667	1,0000	1,0000	1,0000
I_5	0,7000	0,9667	1,0000	1,0000	1,0000
I_6	0,7667	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
I_7	0,6000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
I_8	0,7667	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

El siguiente paso consistió en obtener los valores de la desviación normal estándar inversa a partir de los resultados de las frecuencias relativas acumulativas. Se observa que en este último paso mencionado la cantidad de categorías de la encuesta se ha reducido a dos, lo que posibilita delimitar dos intervalos para evaluar la categoría a la que pertenece cada indicador según la opinión de los expertos.

Tabla 3.8:Determinación de los puntos de corte

Indicadores	C1	C2	Suma	P	N-P
I_1	1,28	3,49	4,77	2,39	-0,53
I_2	0,84	3,49	4,33	2,17	-0,31
I_3	0,34	3,49	3,83	1,92	-0,06
I_4	0,34	1,83	2,17	1,09	0,77
I_5	0,52	1,83	2,36	1,18	0,67
I_6	0,73	3,49	4,22	2,11	-0,26
I_7	0,25	3,49	3,74	1,87	-0,02
I_8	0,73	3,49	4,22	2,11	-0,26
Suma	5,04	24,61	29,65	14,82	
Puntos de corte	0,63	3,08		N=1,85	

A partir de la evaluación de los puntos de corte y su comparación con los resultados de los parámetros N-P de cada una de las filas de la Tabla 3.8, es posible valorar el grado de adecuación de cada uno de los ocho indicadores evaluados.

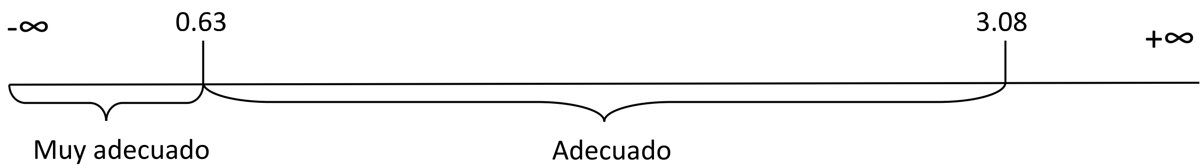


Figura 3.1: Representación de la recta de puntos de corte

Como se observa en la Tabla 3.8, el resultado de los parámetros N-P para los indicadores I_1, I_2, I_3, I_6, I_7 e I_8 a evaluar resulta menor que el primer intervalo de los puntos de corte. Este resultado permite aseverar que los expertos consultados consideran como muy adecuada:

- La influencia de la materialización con el empleo de las TIC para la consolidación del nexo símbolo-objeto matemático en el perfeccionamiento conceptual.

- La influencia de la transferencia entre registros semióticos para la generalización en el perfeccionamiento conceptual.
- La influencia de las relaciones dialécticas objeto-proceso, variable-parámetro y el carácter singular-general del objeto matemáticos en el aprendizaje conceptual del Álgebra.
- La planificación de los tipos de clases en correspondencia con las fases del proceso.
- La correspondencia entre los tipos de tareas y las fases del proceso.
- La contribución de la metodología a mejorar la efectividad de los estudiantes universitarios en el empleo del Álgebra como herramienta en aplicaciones matemáticas.

Así como que consideran adecuada:

- La pertinencia del modelo semiótico informático que sustenta la metodología para el perfeccionamiento de los conceptos algebraicos de estudiantes universitarios con el empleo de los asistentes matemáticos.
- La correspondencia entre el modelo (concepción teórica) y la metodología (instrumento).

Como resultado de la aplicación de la encuesta a expertos también se obtuvieron una serie de recomendaciones y criterios que permitieron perfeccionar los resultados de la investigación. Entre ellos se destacan:

1. El análisis de la evaluación como proceso de ascensión al objetivo y no sólo el objetivo para que pueda ser realmente sistemática.
2. El carácter integrado de la formación con la aplicación de conceptos.
3. La articulación de las representaciones semióticas y de las traducciones y transformaciones entre representaciones con los componentes conceptuales, procedimentales y argumentativos, a lo largo del desarrollo del curso.

Los resultados obtenidos demuestran el valor científico-metodológico del modelo semiótico informático y la metodología propuesta, así como la factibilidad de emplear la metodología con el objetivo de contribuir al perfeccionamiento de la formación de conceptos algebraicos en estudiantes universitarios con el empleo de los asistentes matemáticos.

3.2 Comprobación parcial de la efectividad de la metodología a través de un pre-experimento pedagógico formativo en la asignatura Álgebra Universitaria en la Universidad APEC, de la República Dominicana.

La comprobación parcial de la efectividad de la metodología se concretó en la asignatura Álgebra Universitaria (MAT 121), que se imparte en la Universidad APEC de la República Dominicana en el cuatrimestre mayo – agosto del 2008 en un grupo de 36 estudiantes de las carreras de negocios. Esta comprobación parcial constituyó un pre-experimento dado que se llevó a cabo en un solo grupo.

Esta asignatura tiene de prerrequisito la asignatura Matemática Preuniversitaria (MAT 100) que aborda los contenidos de conjuntos numéricos, expresiones algebraicas, operaciones con fracciones algebraicas y las técnicas algebraicas fundamentales y a su vez es prerrequisito de la asignatura Cálculo I (MAT 131) para las carreras de Contabilidad, Administración, Mercadeo que se imparte en el tercer cuatrimestre y de Estadística I (MAT 250) para las carreras de Turismo, Publicidad y Diseño de interiores que se imparte en el quinto cuatrimestre de estas carreras que no reciben Cálculo I. En el Anexo 2 se refleja el programa de la asignatura.

Se seleccionó la unidad I "Funciones y ecuaciones algebraicas lineales", dado que estos temas siempre están presentes en los programas de Álgebra básica que se imparten en la disciplina Matemática en diferentes niveles educativos.

A. Recursos requeridos disponibles para la implementación de la metodología:

Hardware: La Universidad APEC cuenta actualmente con dos campus. El campus I con 16 laboratorios de computación con un total 320 computadoras y el campus II con 4 laboratorios de computación con 79 computadoras, con red LAN con topología de BUS y un servidor con configuración DHCP, con un APPLIENCE para filtrar el contenido de Internet.

Los laboratorios cuentan con Smart Board, con Touch Screen, proyector digital, pantalla de proyección. A pesar de la cantidad de computadoras y accesorios tecnológicos, normalmente trabajan dos estudiantes por computadora.

Software: Con fines académicos se ha implementado el MOODLE como entorno virtual de enseñanza-aprendizaje para facilitar la comunicación pedagógica en el proceso. El entorno virtual de enseñanza-aprendizaje sirve para distribuir materiales educativos en formato digital (textos, imágenes, audio, simulaciones, juegos, etc.), realizar debates y discusiones en línea sobre aspectos del programa de la asignatura, integrar contenidos relevantes de la red y para posibilitar la participación de expertos o profesionales externos en los debates o charlas.

En la Universidad APEC se cuenta con el asistente matemático Derive, el cual permite realizar cálculos simbólicos, cálculos numéricos y cálculos gráficos en dos y tres dimensiones. Este asistente matemático se elige para la implementación de la metodología porque se trata de uno de los programas informáticos de Matemática más populares, de fácil manejo y con pocos requerimientos sobre la computadora en que se utiliza, estas razones hacen de él una herramienta muy útil para la enseñanza-aprendizaje del Álgebra Universitaria.

Los estudiantes de la Universidad APEC, son estudiantes de la clase media que generalmente trabajan y estudian. Se caracterizan por no disponer en sus hogares de computadoras o calculadoras que contienen el Derive, por lo que hizo necesario concebir la implementación de la metodología a partir del uso de los laboratorios de que dispone la universidad.

Capacitación de los docentes: Se requirió que profesores de Matemática que imparten la asignatura Álgebra Universitaria tuvieran dominio del Derive, así como del empleo del mismo en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. En el proceso de capacitación en el proyecto de "Mejora de la enseñanza de la Matemática" que se desarrolla en la Universidad APEC, se impartió un curso del uso del Derive para los docentes de Matemática de la universidad. Además en universidad se cuenta con un Centro de Apoyo a la Docencia (CADOC) que tiene entre sus objetivos capacitar a los docentes en el uso de las TIC para el proceso de enseñanza-aprendizaje, impartiéndoles los cursos que demanda la institución.

B. Aplicación de la metodología:

I. Diagnóstico de la formación de conceptos algebraicos en los estudiantes universitarios:

Este se realizó en la clase inicial de la primera unidad que es "Funciones y ecuaciones algebraicas lineales". La prueba diagnóstica (Anexo 14) fue aplicada a 34 de los 36 estudiantes del grupo para detectar en cuáles de los conceptos esenciales del curso tenían dificultades.

En relación con la primera unidad, en la cual se implementó la metodología los conceptos fueron: función; evaluación de una función; dominio de funciones; clasificación de funciones en inyectiva, sobreyectiva, biyectiva, función lineal y ecuaciones lineales. Además se diagnosticaron las habilidades básicas de los estudiantes en el manejo del Derive como son: el funcionamiento del menú, los botones de la barra de herramientas y la edición de expresiones haciendo especial hincapié en los operadores fundamentales.

El diagnóstico reveló que en las preguntas de la primera unidad relacionadas con el concepto de función fueron contestados correctamente por ocho estudiantes para un 23.53%, demostrándose poco dominio del concepto de función en sus diferentes formas de representar el mismo. Como estaba pronosticado, la mayoría de los estudiantes respondieron correctamente la pregunta relacionada con la evaluación de funciones, en el tema del dominio de las funciones más del 50% de los estudiantes no contestaron una de las dos preguntas relacionadas con el tema, no comprendieron que la pregunta que se realizó estaba relacionada con el concepto dominio de una función. En relación a la clasificación de funciones sólo el 26 % de los estudiantes supieron responder este tema, demostrando poco dominio del mismo. Sin embargo el 88% de los estudiantes identificaron correctamente cuando una función es lineal, aunque en los ejercicios solo el 20,5% pudo desarrollarlo correctamente.

En relación con el Derive, el 85.3% de los estudiantes presentaron dificultad con su manejo y pocos estudiantes pudieron pasar del modo algebraico al gráfico. De los cinco estudiantes que manipularon el Derive sólo dos de ellos pudieron interpretar correctamente los resultados que le ofrecía el asistente matemático.

Al concluir el diagnóstico se describió a los estudiantes el funcionamiento del menú del Derive y de los botones de la barra de herramientas; se explicó cómo editar expresiones haciendo hincapié en los operadores fundamentales y en la edición de gráficas, además se practicaron operaciones básicas tales como mover, borrar, recuperar, pegar y editar expresiones y subexpresiones.

II. Planificación de las tareas a desarrollar según la lógica didáctica del perfeccionamiento en la formación conceptual

La primera acción a desarrollar consistió en la determinación de la tipología de clases de la unidad I "Funciones y ecuaciones algebraicas lineales". Los tipos de clases que se seleccionaron fueron: conferencia interactiva, talleres y clases prácticas, así como una que se le denominó "mixta" en la cual se aplicó el diagnóstico y se dieron las orientaciones sobre el uso del Derive. La estructuración de la unidad por tipos de clases fue la siguiente:

Tabla 3.9: Estructuración de la unidad por tipos de clases

No	Tipo de clase	Contenido
1	Mixta	Diagnóstico sobre conceptos. Diagnóstico sobre el Derive y orientaciones sobre su empleo.
2	Conferencia Interactiva	Funciones y ecuaciones lineales
3	Taller	Funciones y ecuaciones lineales
4	Taller	Funciones y ecuaciones lineales
5	Clase Práctica	Funciones y ecuaciones lineales
6	Clase Práctica	Ecuaciones lineales

La segunda acción estuvo encaminada a la determinación de los tipos de tareas que se realizarían en cada tipo de clases según las fases de la metodología tomando en cuenta los resultados del diagnóstico.

Conferencia interactiva: Se planificaron tareas de elicitación de los preconceptos relativas al concepto función, que incluían relaciones y ejemplos que no están en ninguna de las dos categorías anteriores. Un ejemplo de este tipo de tareas fue la siguiente:

Tarea: ¿Cuál de las siguientes situaciones son funciones?

a) Consideremos el conjunto de estudiantes de un aula y el conjunto de sillas que hay en la misma.
b) Supongamos que estamos en una fiesta familiar. Vamos a considerar como primer conjunto las madres que asistieron a dicha fiesta y como segundo conjunto a los hijos de estas madres. Nos preguntamos si podemos considerar una función la relación existente entre el conjunto de madres y el conjunto de niños.
c) En el mismo ejemplo anterior consideremos al conjunto de niños como primer conjunto y el conjunto de madres como segundo conjunto.

También se planificaron tareas para elicitar los conceptos relacionados con función lineal y ecuación lineal.

La metodología posibilitó seleccionar diferentes tareas que condujeran a la elicitación de los conceptos referidos, utilizando para ello diferentes registros, (literal, algebraico, gráfico, etc.) con el empleo del Derive.

Talleres: Para los mismos se planificaron tareas de apropiación-generalización y aplicación de conceptos. Las tareas a desarrollar abarcaron todo el contenido de la unidad. En el primero se seleccionaron tareas sobre las funciones y ecuaciones lineales, abordándose en este primer taller las ecuaciones lineales más simples, como es el caso ax + b =0. En el segundo taller se escogieron tareas sobre funciones y ecuaciones lineales con coeficientes literales y ecuaciones racionales.

La lógica didáctica fue ir desarrollando la fase de apropiación-generalización en estrecho vínculo con la fase de aplicación de conceptos. En la fase apropiación-generalización la secuencia fue tareas de materialización seguidas por tareas de recodificación vinculadas con tareas para consolidar las relaciones del Álgebra. En la fase aplicación de conceptos la secuencia de las tareas fueron de categorización, sistematización y de aplicación a nuevos contextos.

Ejemplos de las tareas que se seleccionaron son las siguientes:

- Tareas de la materialización en diferentes registros de representación semiótica para analizar los rasgos esenciales.

  Era necesario desarrollar diferentes tareas de materialización que posibilitaran abordar los elementos esenciales de los conceptos. Esta tarea estaba dirigida a que los estudiantes interiorizaran la necesidad de identificar los valores para los cuales una función no está definida, es decir, determinar su dominio de definición

  Tarea: Para la siguiente función:

  f(x) = $\frac{24}{10-x}+\frac{24}{10+x}$

  a. Determina su dominio de definición.
  b. Represéntala gráficamente utilizando el Derive.
  c. Argumenta las características del gráfico en pantalla de acuerdo a los resultados del dominio obtenido analíticamente.

- Tareas de categorización y de recodificación entre registros de representación semiótica.

  Este tipo de tarea vincula la aplicación de conceptos con la recodificación entre registros de representación semiótica. Los gráficos se proyectarían en una pantalla utilizando el proyector digital con el objetivo de utilizar la representación gráfica para que los estudiantes extrajeran la información relativa a los rasgos esenciales del objeto matemático. Estos tienen que determinar si son ejemplos o no ejemplos de funciones. Posteriormente utilizará el lenguaje algebraico y/o el lenguaje literal; lo cual es parte de la articulación entre los registros semióticos para la consolidación del nexo símbolo-objeto del cual depende la apropiación conceptual. Finalmente debe utilizar el Derive, lo que le permitirá corroborar la validez de sus respuestas analíticas. Un ejemplo de este tipo de tarea es el siguiente:

Tarea: A partir de los gráficos dados (figuras A, B, C y D) determine:

a) Cuáles representan funciones lineales.

Para los que representen funciones:

b) Escribir la expresión analítica de la función.

c) Expresar sus intervalos de monotonía, dominio y recorrido, decir si es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva, según el dominio y recorrido.

d) Represéntela gráficamente utilizando el Derive. ¿Concuerda su representación con la gráfica inicial? Si no es así revise su expresión analítica a partir de los elementos no concordantes de las gráficas.

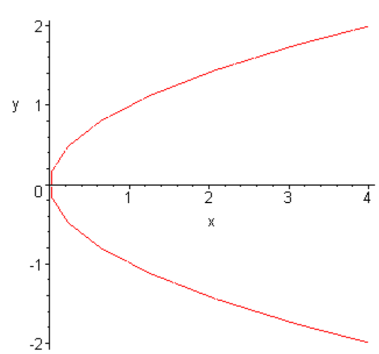


Figura A

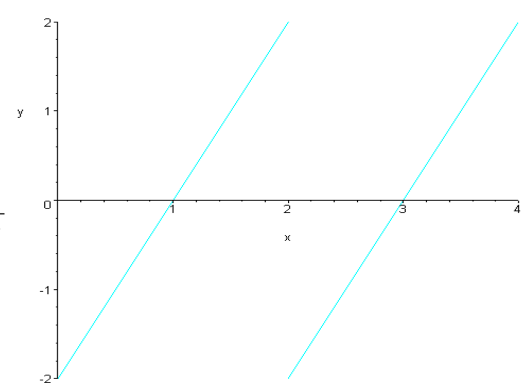


Figura B

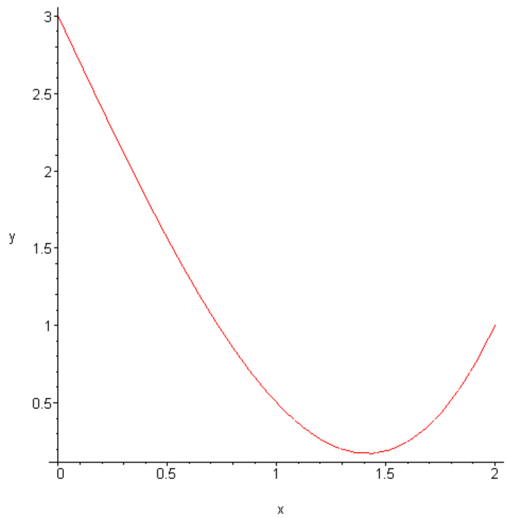


Figura C

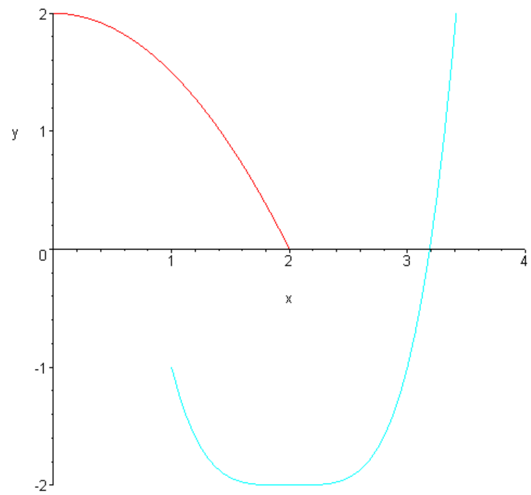


Figura D

1. Los gráficos se proyectan en una pantalla, se entregan en papel o se dibujan en la pizarra.
2. Los estudiantes trabajarán con el asistente matemático para verificar sus propuestas analíticas y trabajarán de forma interactiva hasta obtener la respuesta correcta. El asistente matemático permite presentar una variedad considerable de gráficos en poco tiempo, lo cual agiliza el proceso docente incrementando la actividad del estudiante.
3. Este trabajo lo desarrollarán en pequeños grupos (dúos o tríos).
4. Es necesario insistir en gráficos que no representen funciones, dado que los estudiantes tienen el preconcepto de que cualquier gráfico es una función.

- Tareas para consolidar las relaciones del Álgebra

Se planificaron tareas para la consolidación de las relaciones dialécticas objeto-proceso, variable-parámetro y el carácter singular-general del objeto algebraico, las que se insertarían vinculadas a los conceptos que se van tratando en la unidad.

Un ejemplo de estas fue la representación de familias de gráficos de rectas. En este aprecia e interpreta la influencia de las variables y parámetros en los gráficos de las rectas. Para comprender la dialéctica variable-parámetro se requiere hacer un trabajo interactivo con el

Derive de modo que el estudiante pueda apreciar la influencia de cada uno de estos elementos en el objeto matemático.

Tarea: Dado y = a x + b.

a) Asignar valores a los parámetros "a" y "b". Representarlo gráficamente utilizando el Derive. Incluya valores positivos, negativos y nulo.

b) Identificar el comportamiento de las curvas de acuerdo a la variación de cada parámetro.

c) Para la función general y=ax +b, asigne a a=3 y b=-3, grafique manualmente la función lineal específica.

d) Con respecto al inciso anterior que valor toma x si y=0?, ¿cómo se observa en el gráfico? que explicación matemática pudieras dar a este suceso.

e) Compare el efecto en los gráficos producidos por las variaciones entre los parámetros y las variables.

- **Tareas de sistematización**

Se planificaron tareas que interrelacionan el concepto de función con otros conceptos que el estudiante ya posee. Un ejemplo de este tipo de tarea es la siguiente, donde se interrelaciona el concepto de función con el concepto de desigualdad, a partir de tener en cuenta la definición del dominio de una función y determinar la imagen usando las desigualdades.

Tarea: Para las siguientes funciones:

1. $f(x) = 2x + 3$ para $3 < x < 8$
2. $f(x) = 3x – 5$ para $-2 < x < 4$
3. $f(x) = -4x + 6$ para $3 < x < 9$
4. $f(x) = -3x – 7$ para $-4 < x < 5$

a) Determina la imagen.

b) Represéntalas gráficamente utilizando el Derive.

c) Argumente las características del gráfico en pantalla y su correspondencia con la imagen de la función.

- Tareas de aplicación en nuevos contextos

Dentro de las tareas de aplicación a nuevos contextos se planificaron algunas dirigidas al establecimiento de relaciones funcionales. En esta tarea el estudiante trabaja con múltiples registros semióticos, realizando la conversión entre los mismos, por lo que se trabaja de forma paralela la recodificación semiótica con la aplicación a nuevos contextos. Un ejemplo de este tipo de tarea es la siguiente:

Tarea: Dada la siguiente situación:

Un mayorista vende un producto por libras, o fracciones de libras. Si se ordena no más de 10 libras, cobra 2 pesos por libra. Sin embargo para atraer órdenes mayores cobra sólo 1.80 por libra si se ordena más de 10 libras.

a) Encontrar un modelo que exprese el costo total de la orden como función de la cantidad ordenada.
b) Determine el costo de una orden de 9.5 libras y de 10.5 libras.
c) Grafica la función obtenida anteriormente utilizando el Derive
d) Comprueba en la gráfica el resultado obtenido analíticamente.

- Otros tipos de tareas de aplicación

Se planificaron otros tipos de tareas de aplicación en nuevos contextos, como es el caso de las ecuaciones modulares.

Tarea : Resolver las siguientes ecuaciones modulares lineales:

1. $|2x+4| = 4$
2. $\left|\frac{3}{x} - 2\right| = 1$

3. $-|x|-\frac{2}{3}=-\frac{3}{2}$ 4. $|x+1|+2=2$

- Tareas para el trabajo independiente

  Se planificaron tareas para que el estudiante las realizara de forma independiente al concluir los talleres. Son importantes tareas de aplicación de la vida cotidiana donde ellos utilicen el concepto de funciones y su representación gráfica. Un ejemplo de tarea de este tipo es la siguiente:

  Tarea Piensa en tu entorno social o laboral y plantea una situación que cumpla las condiciones de ser una función. Expresa tu situación como una expresión algebraica y grafícala.

Clases prácticas: en la unidad se realizaron dos al concluir los talleres. La primera clase práctica estaba dedicada a la obtención por parte de los estudiantes de las habilidades manuales en graficar funciones y comenzar a resolver ecuaciones lineales con coeficientes enteros y fraccionarios. La segunda clase práctica se dedicó a la resolución de ecuaciones lineales en sus diferentes casos, así como resolución de diferentes tipos de tareas que resulten mediante funciones y ecuaciones lineales.

III. Ejecución.

Conferencia Interactiva:

Al comenzar esta actividad el profesor ya conocía cuáles eran los preconceptos que tenían los estudiantes del tema a tratar por el resultado de la prueba diagnóstica realizada en la primera clase. Como actividad preparatoria los estudiantes debieron estudiarse los contenidos a tratar en la clase, los que habían sido publicados en el curso que está implementado en el entorno virtual de enseñanza-aprendizaje.

La clase comenzó con un ejemplo que sirvió de elemento motivador a los estudiantes, donde ellos vieron la importancia y la utilidad que tiene el tema para resolver problemas de la vida cotidiana, además de hacer un recordatorio acerca de los contenidos que forman parte de la unidad.

El propósito principal de la conferencia interactiva fue develar los preconceptos de los estudiantes a partir de promover la interacción entre ellos con las tareas de elicitación para dirigir su atención a la formación de conceptos. La conferencia consistió en pequeñas presentaciones sobre los contenidos principales de la unidad (función; evaluación de una función; dominio de funciones; clasificación de funciones, función lineal y ecuaciones lineales) seguida cada presentación de una tarea de elicitación sobre los contenidos tratados. Los estudiantes desarrollaron las tareas y consultaron sus respuestas con otros. Este proceso forzó al estudiante a proporcionar argumentos sobre el concepto que estaban trabajando a la vez que le permitió, tanto a él como al profesor, valorar la comprensión del concepto y detectar las insuficiencias que tenía. Posteriormente se dio la explicación de la respuesta correcta de la tarea. Esta clase se realizó en el laboratorio de computación.

El profesor en discusión con los estudiantes valoró diferentes alternativas proponiendo criterios de asociación entre los elementos de los dos conjuntos relacionados donde se manifestaban los conceptos estudiados: función, dominio, imagen, inyectividad, sobreyectividad, biyectividad, y su gráfica teniendo en cuenta el carácter discreto de los conjuntos que intervienen.

El profesor durante toda la clase orientó y controló el trabajo que ejecutaron los estudiantes tanto de forma colectiva como individual permitiendo el intercambio y la socialización por parte de ellos del conocimiento se está trabajando en ese momento, y comprobó durante toda la clase el grado de cumplimiento de los objetivos de la misma. Se hizo énfasis en los conceptos de función, dominio e imagen de la función y en la clasificación de las mismas, debido a que estos conceptos fueron los que los estudiantes evidenciaron tener mayores dificultades en el diagnóstico.

Entre las principales dificultades develadas en algunos estudiantes se encontraron: confunden el concepto de función con la noción de inyectividad; para determinar intervalos de crecimiento y decrecimiento utilizan el eje de las ordenadas y no el de las abscisas; no logran interpretar qué significa clasificar funciones según operaciones que afectan la variable independiente y no logran leer los gráficos para obtener datos y conclusiones de ellos.

Antes de concluir la conferencia se les entregó un mapa conceptual para que lo completaran (Anexo 15), el cual se conservó por el profesor para ser revisado por ellos al concluir la unidad. En las conclusiones se resumieron los conceptos tratados, destacándose los nexos entre los conceptos nuevos y los conocidos, así como su relación con futuros conceptos a tratar. El profesor orientó un conjunto de tareas que estaban publicadas en el entorno virtual para que los estudiantes se prepararan de forma individual y colectiva para los talleres.

Taller: En ambos talleres se desarrollaron las fases de apropiación-generalización y aplicación de conceptos, las cuales se interrelacionan en las tareas diseñadas. Los contenidos de la unidad se trataron de forma integrada, aunque había diferencias en cuanto al nivel de complejidad de las funciones y ecuaciones tratadas en ambos. Como se concibió en la planificación, en el primero se estudiaron las funciones y ecuaciones lineales, abordándose en este primer taller las ecuaciones lineales más simples. En el segundo taller se profundizaron las funciones lineales y ecuaciones lineales con coeficientes literales y ecuaciones racionales.

Es importante destacar que aunque se estaban desarrollando tareas de las fases de apropiación-generalización y aplicación de conceptos, en estas tareas estuvo también presente la elicitación, pues el proceso de apropiación del concepto por parte de los estudiantes iba siempre acompañado de un proceso de develar las insuficiencias de su conocimiento para perfeccionarlo.

En la introducción se presentaron los conceptos que se iban a tratar en cada taller, así como se controló la ejecución por parte de los estudiantes de algunas de las tareas preparatorias para el taller. En el desarrollo del taller el profesor fue presentando las tareas planificadas para el mismo. El orden de dificultad de las mismas fue en ascenso y el hilo conductor estaba dado por el proceso de mediación semiótica que implica la representación del concepto en un registro dado, el tratamiento en ese registro y la recodificación a otro registro. El empleo del Derive, y sus posibilidades de trabajar tanto en el registro algebraico, como en el registro gráfico, aportó a la ejecución de las tareas que los estudiantes trabajaran con varios registros semióticos (incluyendo el literal).

La ejecución de las tareas propuestas posibilitó que los estudiantes realizaran el proceso de recodificación entre diferentes registros semióticos, en algunos casos se les representó una función en el registro algebraico para que la llevaran al registro gráfico y en otros casos se les representó en el registro gráfico para que la representaran en el registro algebraico. De forma general, los estudiantes mostraron mayores dificultades en la conversión del registro gráfico al registro algebraico.

Los estudiantes evidenciaron que generalmente asociaban diferentes significados a los rasgos de los conceptos estando los mismos dependientes de los registros de representación utilizados. En el caso particular de la función lineal $y = a x + b$, se evidenció que generalmente asociaban diferentes significados a los parámetros “a” y “b”. Por ejemplo, en el caso del parámetro “a”, en el registro algebraico lo interpretaban como un coeficiente; en el registro gráfico como el gradiente del gráfico de y = a x +b; en el registro numérico como el cociente Δy/Δx, mientras que en el registro literal en algunos casos lo asociaban con los términos velocidad, rapidez, etc. El parámetro "b" también demostraron darle diferentes significados según los registros utilizados. En el registro algebraico significaba el término constante de una ecuación, en el registro gráfico el intercepto en el eje *y*, en el registro numérico el valor de "y" cuando "x" es cero, mientras que en el registro literal no hubo respuestas coincidentes de los estudiantes.

La comparación entre las unidades significantes, en este caso los parámetros "a" y "b", entre los diferentes registros semióticos, y la variación de los parámetros, posibilitó ir articulando los significados atribuidos a los mismos, lo que coadyuvó a la integración de los mismos en el concepto de función lineal.

Con el uso de múltiples registros y la recodificación entre ellos se favoreció la comprensión de conceptos por los estudiantes, identificándolos en diferentes registros de representación semiótica, con lo que se propició una mayor independencia del concepto de una representación semiótica en particular. Con los ejercicios propuestos los estudiantes de forma individual fueron mejorando la consolidando el nexo símbolo-objeto del concepto tratado.

Otro elemento sobre el cual se incidió fue el tratamiento de la relación esencial como es el carácter singular-general del objeto algebraico, las relaciones dialécticas variable-parámetro y proceso-objeto. Las observaciones de la ejecución de las tareas relativas a las características de los parámetros y variables mostraron que para algunos estudiantes era natural utilizar parámetros para generalizar una relación o un procedimiento, mientras que otros parecían estar confundidos por la utilización de varias letras en una expresión, cada una teniendo un diferente rol. El desarrollo de este tipo de tareas demostró que algunos estudiantes no superaron las dificultades en relación a la comprensión del carácter generalizador de los parámetros, lo que se tuvo en cuenta para la planificación de otras tareas de este tipo para el resto del curso.

En la tarea de sistematización relacionada con la relación entre funciones e inecuaciones se observó que las principales dificultades estaban en que no manejan la notación de intervalo (abierto-cerrado), mostrando dificultades en el reconocimiento de los símbolos "<, >, ≤, ≥". Este tipo de tarea sirvió para consolidar las relaciones entre los conceptos función, ecuación e inecuación.

La realización de tareas de aplicación a nuevos contextos, como en la que debía establecer relaciones funcionales a partir de situaciones reales, mostró que existía un desarrollo desigual en los estudiantes en el proceso de conversión del lenguaje natural al lenguaje algebraico, por lo que presentaron problemas en la modelación. Otro elemento que provocó discusiones entre los estudiantes fue el hecho de presentar una función a trozos, así como representar la misma utilizando el Derive. Como las tareas se desarrollaron en dúo o tríos permitió que los estudiantes intercambiaran sus ideas para luego socializarlas con el grupo. En todo momento el profesor apoyó el manejo del Derive y controló cómo los estudiantes analizaban los resultados obtenidos por el mismo.

En las conclusiones se resumieron los aspectos tratados en el taller y se orientaron ejercicios para las clases prácticas, los cuales estaban publicados en el entorno virtual de enseñanza-aprendizaje.

En los talleres se evaluó el trabajo en equipo, y la forma de resolver las tareas planteadas por el profesor, además de ver la forma en que podían llegar a conclusiones después de apoyarse en el Derive para resolver algún ejercicio.

Clase práctica #1: El objetivo de la misma fue que los estudiantes desarrollaran habilidades en graficar manualmente funciones lineales y comenzaran a resolver ecuaciones lineales con coeficientes enteros y fraccionarios. Los estudiantes para esta actividad trabajaron individualmente y en grupo. Las dificultades generales que se observaron en esta actividad estuvieron relacionadas con la realización de las gráficas manuales, las cuales se convirtieron en una tarea monótona y en algunos casos con poca precisión, sin permitir hacer un análisis de los resultados obtenidos por falta de tiempo. Sin embargo se evidenció que, en la resolución de ecuaciones lineales con coeficientes enteros y fraccionarios, los estudiantes mejoraron sus resultados al solo presentar dificultades la tercera parte de los mismos, lo que se constató con el control realizado por el profesor sobre el desarrollo y resultados de los ejercicios en la clase. Las explicaciones que dieron los estudiantes en el proceso de argumentar sus resultados evidenciaron un mayor dominio de los conceptos tratados en las tareas, así como un mejor tratamiento de los mismos en cada uno de los registros utilizados.

Clase práctica #2. El objetivo de la misma fue que los estudiantes desarrollaran habilidades de resolver ejercicios de ecuaciones lineales con coeficientes literales, racionales, entre otros. En este tipo de ejercicios se manifestó una mejoría en la resolución de los mismos, aunque algunos estudiantes aún mostraron problemas en las habilidades operacionales algebraicas. En esta clase práctica se les entregó a los estudiantes el mapa conceptual que se le aplicó en la conferencia para que detectaran sus propios errores y que con los conocimientos adquiridos en la unidad impartida puedan rehacerlo correctamente. En todos los casos se evidenció una mejoría en relación a los conceptos tratados en la unidad.

Conclusiones parciales del capítulo

1. El valor teórico metodológico y la factibilidad del modelo semiótico informático y la metodología que lo instrumenta, se corroboran a partir de la aplicación del criterio de expertos que reconocen el valor de una nueva propuesta para la didáctica de la formación de conceptos algebraicos en estudiantes universitarios.

2. A través de la aplicación parcial de la metodología en la asignatura Álgebra Universitaria que se imparte en la Universidad APEC a las carreras de negocios entre otras, se evidenció la efectividad de los resultados obtenidos en la investigación. Los estudiantes demostraron una mejoría en la formación de los conceptos tratados de la unidad, identificando los conceptos en varios registros semióticos, así como utilizando varios registros para representar los mismos. La decodificación entre registros semióticos demostró que esta era una vía para la coordinación entre los registros, lo cual coadyuvó a la objetivación de los conceptos. La orientación de la actividad matemática dirigida a desarrollar el grado de generalidad con que se apropian los estudiantes del conocimiento algebraico resultó ser adecuada, aunque debe ser sistemática en el curso para lograr los objetivos deseados

3. Se corrobora que la metodología constituye una vía para perfeccionar el proceso de formación de conceptos algebraicos en estudiantes universitarios, a partir de la integración de las tres fases: elicitación de preconceptos, apropiación–generalización y aplicación de conceptos; desarrolladas a través de la mediación semiótica y de la interpretación del carácter generalizador del conocimiento algebraico con el empleo de los asistentes matemáticos.

CONCLUSIONES GENERALES

- Del análisis realizado de la evolución del lenguaje algebraico se evidencia el rol del nexo símbolo-objeto para la comprensión de conceptos algebraicos. El análisis del marco teórico revela la necesidad de concebir una didáctica del perfeccionamiento de conceptos algebraicos en estudiantes universitarios, que integre diferentes enfoques (solución de problemas, funcional, generalización, lenguaje e histórico) desde una concepción histórico-cultural, para potenciar la consolidación del nexo símbolo-objeto y posibilitar niveles superiores en las generalizaciones teóricas algebraicas.
- El modelo semiótico informático para el perfeccionamiento conceptual sintetiza la mediación semiótica y la interpretación de las relaciones esenciales del Álgebra (singular-general, objeto–proceso, variable-parámetro) para la apropiación-generalización en coordinación con la aplicación de conceptos, con el empleo de los asistentes matemáticos en interacción social.
- La lógica integradora entre las fases elicitación de los preconceptos, apropiación-generalización y aplicación de conceptos que se viabiliza a través de una metodología para el perfeccionamiento conceptual, propicia en mejor desempeño de los estudiantes en la utilización del Álgebra básica como herramienta de trabajo en aplicaciones matemáticas.
- La utilización del método de criterio de expertos permitió la corroboración del valor científico-metodológico del modelo semiótico informático y la metodología propuesta; además la valoración de los resultados alcanzados en el pre-experimento, posibilitó la constatación de

la factibilidad y la pertinencia del modelo y la metodología, lo que contribuye a ofrecer una alternativa de solución para la investigación científica en la didáctica del Álgebra en la formación conceptual.

RECOMENDACIONES

- Proyectar investigaciones didácticas que permitan explicitar el razonamiento algebraico a través de generalizaciones en situaciones-problemas matemáticos.
- Continuar sistematizando la estructura de relaciones del modelo semiótico informático propuesto a partir de elevar la idoneidad didáctica del mismo.

CITAS Y REFERENCIAS

1. Armendáriz, M. (1993). Didáctica de la Matemática y Psicología. Barcelona.

2. Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7, pp. 245-274.

3. Arzarello, F., & Robutti, O. (2004). Approaching functions through motion experiments. Educ stud in Math, special Issue, to appear.

4. Bartlo, J., Saldanha, I.& Kieran, C.(2007). Attending to structure and form in algebra: challenges in designing CAS-centered instruction that supports construing patterns and relationships among algebraic expressions (Proceedings of the 29th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Stateline (Lake Tahoe), NV: University of Nevada, Reno.

5. Bautista, A. (1994). Las nuevas tecnologías en la capacitación docente. Madrid: Visor/Aprendizaje.

6. Bednarz, N., & Janvier, B. (1996). Emergence and Development of Algebra as a Problem Solving Tool: Continuities and Discontinuities with Arithmetic, in Bednarz y Al. (a cura di) Approaches to Algebra, perpectives for resarch and teaching. Kluver Academic Press.

7. Berger, M. (2005). Vygotsky's theory of concept formation and Mathematics education. In Chick, H. L. y Vicent, J.L. (Eds.). Proceeding of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2). pp. 153-160 Melbourne: PME.

8. Berger, M. (1998). Graphic calculators: An interpretative framework. For the Learning of Mathematics, 18(2), pp. 13-20.

9. Berry, J., Graham, E., & Watkins, A. (1994). Integrating the Derive program into the teaching of mathematics. The International Derive Journal, 1(1) , pp. 83-96.

10. Blanco, R. (2007). La Generalización Teórica como proceso Fundamental del Pensamiento.Newsletter # 327. Retrieved from http://www.monografias.com/trabajos47/generalizacion-teórica/generalizacion-teórica.shtml.

11. Blanco, R. (2006). Presupuestos de Vigotsky y la formación de conceptos. Retrieved from http://www.monografias.com/trabajos58/presupuesto'vigotsky/ presupuesto'vigotsky/.

12. Blanco, R. (1999). La abstracción y el nexo símbolo objeto. Revista reforma siglo XXl. Universidad Autónoma de Nuevo León. Monterrey, México: (#20).

13. Bortolotti, E. (1950). Storia della Matematica Elementare. (Vols. lll, parte 2). (eds.). In L. Berzolari.

14. Boubée, C., Delorenzi, O., & Sastre, P. (2006). Significado personal del objeto matemático, función: Diagnóstico sobre articulación entre registros de representación. Argentina: 1ra Reunión Pampeana de Educación Matemática I REPEM, Santa Rosa, la Pampa, agosto.

15. Borda, M., & Villareal, M. (2006). Humans-with-media and the reorganization of Mathematical Thinking. New York: Springer.

16. Brousseau, G. (1983). Les Obstacles epistemologiques et les problemes en Matematiques. Reserches en Didactique des Mathématiques, 4(2), pp. 165-180.

17. Brown, R. (1998). Using computer algebra systems to introduce algebra. The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education, 5, pp. 147-160.

18. Buchberger, B. (1990). Should students learn integration rules? Sigsam Bulletin, 24(1), pp. 10-17.

19. Burrill, G., (2002). Handheld graphing technology in secondary mathematics:research findings and implications for classroom practice.

20. Cabo, F., Llamazares, B., & Peña, M. (2001). Derive: Una herramienta para el aprendizaje de las matemáticas. Valladolid, España: Universidad de Valladolid, departamento de Economía Aplicada (Matemática).

21. Cedillo, T. (1995). Introducción al Álgebra mediante su uso: una alternativa factible mediante calculadoras programable. (Vol. 7). México: Publicado en Educación Matemática, Grupo Editorial Iberoamericana.

22. Chiappini, G., & Reggiani, M. (2003). Toward a didactical practice based onmathematics laboratory activities, Proceedings of Cerme 3 (Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education), Bellaria, Italy, 28 febbraio-3 marz 2003. Retrieved from http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/.

23. Colin, J., & Rojano, T. (1991). Bombelli, la sincopación del álgebra y la resolución de ecuaciones. L'educazione matematica, XII (2) pp. 125-161.

24. Coll, C. (1987). Constructivismo e interacción educativa. ¿Cómo enseñar lo que se ha de construir? . Madrid: Ponencia en el congreso Internacional de Psicología y Educación. Intervención educativa.noviembre 1991.

25. D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. In: Radford L., D'Amore B. Cinvestav, México DF., México: Semiotics, Culture and Mathematical Thinking. Numero speciale della rivista RELIME.

26. D'Amore, B. (2001). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. Revista de Didáctica de la Matemática , Uno, 27, pp. 51-76.

27. Dario, R., Montero, Y., & Pedrosa, M. (2007). Informática y Educación Matemática en Latinoamérica: Un panorama. Argentina: Universidad Nacional de Mendel Plana Argentina, VII Congreso Iberoamericano de Informática Educativa.

28. Davidov, V. (1982). Tipos de generalización en la enseñanza. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

29. Davis, R. (1984). Learning Mathematics: The cognitive science approach to mathematics education. Norwood, NJ Ablex.

30. Delgado, J. (2006). Generando ejercicios con un asistente matemático. La Habana, Cuba: Instituto Superior Politécnico: José A. Echevarría.

31. Delgado, J., & Válido, I. (2006). La enseñanza-aprendizaje del álgebra con ayuda de un asistente matemático. La Habana, Cuba: Instituto Superior Politécnico: José A. Echevarría.

32. Doerr, H. (2001). Learning algebra with technology: The affordances and constraints of two environments. In H. Chick, K. Stacey, Ji. Vincent & Jo. Vincent (Vol. 1). Melbourne: (Eds.) Proceedings of the 12th ICMI study conference the future of the teaching and learning of algebra: The University of Melbourne.

33. Drijvers, P. (2003). Learning algebra in a computer algebra enviroment. CD-B Press, Center for science and Mathematics education .

34. Drijvers, P. (2000). Students encountering obstacles using a CAS. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5(3) , pp. 189-209.

35. Drouhard, J. (2001). Research in language aspects of algebra: A turning point?. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent. Australia: (eds.) Proceedings of the 12th ICMI Study Conference on the Future of the Teaching and Learning of Algebra, The Univesity of Melbourne.

36. Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In David O. Tall. Advanced Mathematical Thinking, Kluwer: Dordrecht.

37. Dubinsky, E., & Noss, R. (1996). Some kinds of computers for some kinds of Mathematical learning. Mathematical Intelligencer, 18(1), pp. 17-20.

38. Duval, R. (1998). Signe et objet (I). Trois grandes etapes dans la problematique des rapports entre representations et objet. Annales de didactique et de science cognitives 6 , pp. 139-163.

39. Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. México: (eds.), Investigaciones en Matemática Educativa II, Grupo Editorial Iberoamérica.

40. Duval, R. (1988). Gráficas y Ecuaciones. Antología en Educación Matemática. Cambray, R.; Sánchez, E.; Zubieta, G. (eds.) DME, Cinvestav-IPN. pp. 125-139.

41. Feliz, G. (1998). Memorias del departamento de matemáticas. Santo Domingo, República Dominicana. Junio.

42. Fernández, L. (2008). Conversatorio con estudiantes de Columbia secondary School for Math. 26 de Septiembre del 2008, Universidad de Columbia, New York, USA. Retrieved from www.diariodigital.com.do/artículo.33400.html.

43. Galán, J., Galán, M., Padilla, & Rodríguez, P. (2002a). Are computers under-used in Mathematical teaching for engineers? Educational technology. Serie Sociedad de la información nº 9, pp. 220-225.

44. Galán, J., Galán, M. A., Padilla, & Rodríguez, P. (2002b). Use of the computer in Mathematic teaching for engineers. A powerful calculator? Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level). Hersonissos, Creta. Grecia.

45. García, A., García, F., Hoya, S., Rodríguez, G., & Villa, A. (2002). Differential calculus of several variables with Mathematica or Maple. Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level). Hersonissos, Creta. Grecia.

46. García, L. (2006). Modelo para el desarrollo de la habilidad de resolución de problemas a través del cálculo integral en FIME, basado en los niveles de complejidad del nexo símbolo objeto. Tesis Doctoral. Mexico.

47. Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. Recherches en Didactiques des Mathematiques, 22 (2/3): pp. 237-284.

48. Godino, J., & Batanero, C. (1999). Una aproximación semiótica y antropológica a la investigación en didáctica de las matemáticas.

49. Godino, J., & Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En, A. Sierpinska y J. Kilpatrick, (eds.), Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity, Dordrecht: Kluwer, A. P.

50. Godino, J., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. España. The International Journal on Mathematics Education, Vol. 39 (1-2): pp.127-135.

51. González, F. (2005). Algunas cuestiones básicas acerca de la enseñanza de conceptos matemáticos. Fundamentos en Humanidades Universidad Nacional de San Luis, Año VI (No.I), pp. 37-80, Venezuela.

52. González, M., Amo, E., & García, E. (2006). Sistemas de Computación Algebráicos. Evolución y aplicaciones. España: Departamento: Economía y Empresa (Area de Matemática), Universidad de Castilla-La Mancha.

53. González, M. (2007). El constructivismo en la evaluación de los aprendizajes del Álgebra lineal. Venezuela. Retrieved from www.scielo.org.ve/scielo.php.

54. Graham, A., & Thomas, M. (1999). A graphic calculator approach to algebra. Mathematics Teacher, 167 , pp. 34-37.

55. Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J., & Whitenack, J. (2000). Symbolising, modeling, and instructional design. In P. Cobb, E. Yackel & K. McClain, (eds.). USA: Symbolising and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. pp. 225-273.

56. Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. Journal for Research in Mathematics Education , 26, 2, pp. 115–141.

57. Gray, E., & Tall, D. (1991). Duality, Ambiguity and Flexibility in Successful Mathematical Thinking. In Fulvia Furinghetti (Vol. 2). Assisi, Italy: Proceedings of PME XIII, pp. 72-74.

58. Greeno, J. (1983). Conceptual Entities. In Dedre Gentner, Albert L. Stevens. Hillsdale, NJ, USA: (Eds.), Mental Models, Lawrence Erlbaum Associates.

59. Guzmán, J., & Kieran, C. (2002). The role of calculators in instrumental genesis: The case of Nicolás and factors and divisor. PME International conference, 3, pp. 41-48. In A.D. Cockburn & E. Nardi (eds.), Proccedings of the 26 th.

60. Guzmán, M. (1984). Panorama de la matemática. Una enciclopedia bajo el título Avances del Saber, Tomo 5, dedicada a la ciencia, técnica y cultura. Labor .

61. Hegedus, S., & Kaput, J. (2004). An introduction to the profound potential of connected algebra activities: issues of representation, engagement and pedagogy. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. vol.3, pp. 129-136. Bergen, Norway: Program Committee.

62. Heid, M.K., Blume, G.W., Flanagan, K., Iseri, L. & Kerr, K. (1999). The impact of CAS on non-routine problem-solving by college mathematics students. International Journal on Computer Algebra in Mathematics Education, 5(4), pp. 217-249.

63. Heid, M. (1988). Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. Journal for Research in Mathematics Education 19, pp. 3-25.

64. Hernandez, P. (2000). Enseñando valores socioafectivos en un scenario constructivista. Bienestar subjetivo e inteligente intrapersonal. En J. Beltrán y otros. Intervención psicopedagógica y curricular escolar. Madrid: Pirámide, pp. 217-254.

65. Hernández, S. (2000). Experiencias adquiridas durante el desarrollo de la práctica: Laboratorio de Álgebra. México: Centro de ciencia de Sinaloa. redxperimental.gob.mx/descargar.php.

66. Hillel, J., Lee, L., Laborde, C., & Linchevski, L. (1992). Basic functions through the lens of computer algebra systems. Journal of Mathematical Behavior, 11, pp. 119-158.

67. Hitt, F. (1996). Investigaciones en Matemática Educativa I. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

68. Hitt, F. (1996). Sistemas Semióticos de Representación del Concepto de Función y su Relación con Problemas Epistemológicos y Didácticos. Revista de Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamérica .

69. Hoya, S., Martín, A., Rodríguez, G., & Visus, I. (2002). The use of symbolic calculus software in the teaching of Mathematics at Engineering Schools. Proceedings of the International Conference on ICT's in Education. Badajoz, España.

70. Kaput, J. (2000). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 441664).

71. Kieran C.,(2007): Interpreting and Assessing the Answers Given by the CAS Expert: A Reaction Paper in The International Journal for Technology in Mathematics Education, 14(2), 103-108

72. Kieran, C., & Saldanha, L. (2005). Computer algebra systems (CAD) as tool for coaxing the emergence of reasoning about equivalence of algebraic expressions. Proceedings of the 29 th conference of the International Group for the Psychology of mathematics educations Melbourne, vol.3, Australia, pp. 193-200.

73. Kindt, M. (2000). The inheritance of al-Khwarizmi. Leusden, Netherlands: NVvW.: In F. Goffreee, M. van Hoorn & B. Zwaneveld, (eds.), One hundred years of mathematics education pp. 57-70.

74. Kline, M. (1991). Historia del pensamiento matematico, I-II, Einaudi, Torino. New York : Mathematical thought from ancient to modern times, Oxford University press.

75. Landa, J. (2001). Introducción a la hoja de cálculo a partir de la noción de función. Memorias IX Seminario Nacional de Microcomputadoras en la Educación matemática. Universidad Autónoma de Chapingo, México. Retrieved from www.fismat.unich.mx/mateduca/carlos/mem9sem.

76. López, L. (2006). Metodología para el perfeccionamiento del proceso Enseñanza aprendizaje del cálculo vectorial, fundamentada en el desarrollo de la Visualización matemática tridimensional. Tesis Doctoral Mexico.

77. Macintyre, T., & Forbes, I. (2002). Algebraic skills and CAS - Could assessment sabotage thepotential? International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education. 9, pp. 29.

78. Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee, Approaches to algebra, perspectives for research and teaching. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, pp. 65-86.

79. Mazur, E., et al. (2002). Peer Instruction: Results from a Range of Classrooms,Phys. Teach., 40, pp. 206-209.

80. Menchinskaya, N. (1969). The psychology of mathematics concepts: fundamentals problems and methods of research (Vol. I). California: En: Kilpatrick y Wirszup (eds.), Soviets studies in the psychology of learning and teaching mathematics Stanford, School Mathematics Study Group, (publicación del NCTM).

81. Miyar, I. (2005). Metodología para la asimilación conceptual del Álgebra Universitaria con el empleo de los asistentes matemáticos. Tesis en opción al título académico de Máster en Ciencias de la Educación. Camagüey, Cuba.

82. Nava, J. (1998). Experiencia en el uso de programas computacionales para enseñar Matemáticas en Ingeniería en la UNITEC.Retrieved from http://dcb.fi-c.unam.mx/foro/memorias/dieciocho.pdf.

83. O'Callaghan, B. (1998). Computer-intensive algebra and students' conceptual knowledge of functions. Journal for Research in Mathematics Education , 29, pp. 21-40.

84. Ortega, P. (2002). La enseñanza del Álgebra Lineal mediante sistemas informáticos de cálculo algebraico. Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid . Madrid, España.

85. Otte, M. (2003). Does mathematics have objects? In what sense? Synthese. 134 (1-2): pp. 181-216.

86. Papini, M. (2003). Algunas explicaciones vigotskiana para los primeros aprendizajes del Álgebra. RELIME Vol. 6, 1 de Marzo del 2003, pp. 41-47. Retrieved from dialnet.uniroja.es/servlet/fichero_artículo.

87. Pea, R. (1987). Cognitive technologies for mathematics education. NJ: In A. Schoenfeld (ed.), Cognitive science and mathematics education. Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates.

88. Pegg, J., & Davey, G. (1998). A synthesis of Two Models:Interpreting Student Understanding in Geometry. New Jersey: In R. Lehrer & C. Chazan, (eds.), Designing Learning Environmentsfor Developing Understanding of Geometry and Spac. Lawrence Erlbaum.

89. Pérez, O. (2007). La evaluación del aprendizaje en la Educación Superior. Editorial La Escalera. Primera Edición. ISBN: 978-9945-430-04-2. Santo Domingo. República Dominicana.

90. Pimienta, J. (2003). Matemáticas IV: Enfoque constructivista. España. Pearson. Retrieved from www.gandhi.com.mx/index.cfm/id/Producto/dept/libros.

91. Polluelo, A. (2001). El futuro de la enseñanza y aprendizaje del Álgebra. Documento de la Discusión para el Estudio de ICMI 12, México.

92. Pozzi, S. (1994). Algebraic reasoning and CAS: Freeing students form syntax? In H. Heugl &B. Kutzler, Derive in education: Opportunities and strategies. Bromley,UK: Chartwell-Bratt.

93. Protti, O. (1999). La historia de las matemáticas como instrumento pedagógico. Costa Rica. http://www.cimm.ucr.ac.cr/aruiz/Libros/Uniciencia/Articulo/Volmen2/Parte10/articulo19.html. consultado 5 de Junio del 2007.

94. Puig, L. (1994). Semiótica y matemáticas (Vol. 51). Valencia, España: Eutopías 2a. época. Centro de Semiótica y teoría del espectáculo de la Universitat de València & Asociación Vasca de Semiótica.

95. Radford, L. (2006). Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático: Introducción. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa , Vol. 9 (Nº. 1).

96. Radford, L. (2004a). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. Mathematical Thinking And Learning. Lawrence Erlbaum Associates. 5(1), pp. 37–70.

97. Radford, L. (2004b). The sensual and the conceptual: artifact-mediated kinesthetic actions and semiotic activity. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4 , pp. 73–80.

98. Radford, L. (2003). Gestures, speech and the sprouting of signs. Mathematical thinking and learning. 5, 1, pp. 37-70.

99. Radford, L. (2001). On the relevance of Semiotics in Mathematics Education. Semiotics and Mathematics Education at the 25th PME International Conference The Netherlands, University of Utrecht, July, pp. 12-17. Netherlands.

100. Radford, L. (2000). Signs and meanings in students emergent algebraic thinking: A semiotic analysis, Educational Studies in Mathematics 42: pp. 237-268.

101. Radford, L. (1998). On Culture and Mind, a post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought, paper presented at the 23rd Annual Meeting of the Semiotic Society of America. Victoria College, University of Toronto, Octubre 15-18.

102. Repo, S. (1994). Understanding and reflective abstraction: learning the concept of the derivative in the computer environment. The International DERIVE Journal 1(1) , pp. 97-114.

103. Rojano, T. (1996). Developing Algebraic Aspects of Problem Solving Within a Spreadsheet Environment. en Bednarz, N.; Lee, L. y Kieran, C. (eds.) Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching, Londres, Boston, Kluwer Academic Publishers.

104. Rubinstein, S. (1966). El proceso del pensamiento.La Habana.Cuba: Editorial Universitaria.

105. Santandreu, M. (2005). Recursos TIC en la enseñanza y aprendizaje del área de matemática. Retrieved from www.comunicacionypedagogia.com/publi/infcup/muestra/pdf/santandreu.

106. SEEC. (2008). Informe sobre las políticas nacionales de Educación. República Dominicana - ISBN-978-92-64-04411-OCDE. Retrieved from www.oecdbookshop.org/oecd/display.asp.

107. Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin, Educational Studies in Mathematics, 22, pp. 1-36.

108. Steinbring, H. (2005). What Makes a Sign a Mathematical Sign? An Epistemological Perspective on Mathematical Interaction. Germany: University of Dortmund.

109. Tall, D., & Gray, E. (2001). Abstraction as a Natural Process of Mental Compression. Mathematics Education Research Centre. University of Warwick, Coventry, CV4 7 AL. UK .

110. Toranzos, F. (1959). Enseñanza de la Matemática. Buenos Aires, Argentina: Editorial Kapelusz.

111. Torre, C., & Martín, L. (2006). Utilización de Asistentes Matemáticos en la Enseñanza de las Matemáticas. España: Departamento: Economía y Empresa, Universidad de Castilla-La Mancha.

112. UNESCO (1998). Primer Estudio Internacional del Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación, Primer Informe, Santiago, Chile.

113. UNESCO. (2007). Informe de UNESCO: Educación para todos en 2015 acanzaremos la meta?, elaborado por el equipo de seguimiento de la educación para todos de la UNESCO. Síntesis con énfasis en A.L. y Argentina, elaborado por el IIPE. Buenos Aires, Argentina: UNESCO Sede Regional, 29 de nov. del 2007.

114. Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In: Coxford, A.F. The ideas of algebra, K-12 (1988 Yearbook of the NCTM), Reston, VA: NCTM pp. 8-19.

115. Van Amerom, B. (2002). Reinvention of early Algebra-Develomental research on the transition from arithmetic to algebra, Utrecht, Cd-b press.

116. Vázquez, R. (1998). La resolución de problema y tareas docentes de Matemática IV para Ingeniería Eléctrica. Tesis de doctorado. Cuba.

117. Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. N.J.: In Carpenter, T., Moser, J. & Romberg, T. Addition and subtraction. A cognitive perspective. Hillsdale, Lawrence Erlbaum. pp. 39-59.

118. Vergnaud, G. (1982). Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education, For the Learning of Mathematics. 32, pp. 31-41.

119. Vigotsky, L. (1986). Thought and Language. In Kozulin, A.

120. Vigotsky, L. (1978). La mente en la sociedad: el desarrollo de las fun Massachusetts, London, England: The MIT Press, Cambridge. Nociones psicológicas superiores. Harvard University Press, Cambride.

121. Yordi, I. (2004). La habilidad del cálculo de procesos en la solución de tareas docentes de la asignatura Álgebra Lineal. Tesis en opción al título de Doctor en Investigación Educativa . La Habana, Cuba: ICCP.

BIBLIOGRAFÍA

1. Abarca, R. (2002). La Filosofía: Vida de la Universidad, Referencia a Henri Lefebyre (1901-).2da ed. Retrieved from www.ucsm.edu.pe/rabarcaf/fividu02.htm-71k.

2. Abramovich, S., & Norton, A. (2001). Technology-Enabled Pedagogy as an Informal Link Between Finite and Infinite Concepts in Secondary Mathematics. Mathematics Educator. Vol.10, núm.2. Retrieved from http://jwilson.coe.uga.edu/DEPT/TME/Issues/v10n2/3abramovich.html.

3. Agostini, E., & et, a. (2004). Enseñanza de la Matemática: Lógicas Presentes en los Ingresantes al Nivel Superior. (Vol. 17). Argentina: Universidad Nacional de Jujuy,Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.

4. Akkoc, H., & Tall, D. (2005). A mismatch between curriculum design and student learning: the case of the function concept, Proceedings of the sixth Bristih Congress of Mathematics Education held at the University of Warwick, pp. 1-8. Retrieved from www.bsrlm.org.uk.

5. Anderson, M., Sáenz-Ludlow, A., Zellweger, S., & Cifarelli, V. (2003). Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing. Otawa: Legas.

6. Arcavi, A., & Hadas, N. (2002). Computer mediated learning: an example of an approach. México: In F. Hitt (Editor), Representations and Mathematics Visualization.International Group for the Psychology of Mathematics Education North American Chapter and Cinvestav-IPN.

7. Artiles, L. (2003). Sistema de Enseñanza Personalizado a Distancia SEPAD Ponencia al XV Forum de Ciencia y técnica. Cuba: Universidad Central de Las Villas.

8. Arzarello, F., Bazzini, L., & Chiappini, G. (1994). L'Algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche. Progetto Strategico CNR-TID, Quaderno n.6.

9. Atweh, B., Forgasz, H., & Nebres, B. (2001). Sociocultural research on mathematics education. London: An international perspective. Lawrence Erlbaum.

10. Bautista, G., & Angel, J. (2001). Didáctica de las matemáticas en enseñanza superior: la utilización de software especializado. Retrieved from http:www.uoc.edu/web/esp/art/uoc/0107030/mates.html.

11. Bello, R., & otros. (2002). Aplicaciones de la Inteligencia Artificial. Guadalajara, México: Ediciones de la Noche.

12. Beltrán, J. (2000). La nueva tecnología a través de Internet. Retrieved from http:/www.educared.net/pdfcongreso-i/Ponenciabeltran.pdf.

13. Berger, T., & Pollatsek, H. (2001). Mathematics and Mathematical Sciences in 2010: What Should Students Know? Retrieved from http://www.maa.org/news/students2010.html.

14. Bednarz, N. (2001). A problem-solving approach to algebra: accounting for the reasoning and notations developed by students, Proc. 12th ICMI Study 'The future of the teaching and learning of Algebra' (Vols. 1, pp. 69-78). Australia: Univ. Melbourne.

15. Blanco, R. (2004). Las investigaciones sobre didácticas de la matemática. Contexto científico y social, Camaguey, Cuba. Retrieved from www.monografías.com/trabajo/9/didáctica-matemática/didáctica-de-matemática.shlml.

16. Bruner, G., & Austin. (1978). El proceso mental en el aprendizaje. Madrid: Narcea S. A. de Ediciones.

17. Bruner, J. (1983). Child's Talk: Learning to use a language. New York-London: W.W. Norton & Company.

18. Bruner, J. (1982). The formats of language acquisition. American Journal of Semiotics (Vols. 1, No. 3, pp. 1-16.).

19. Bruner, J. (1976). Hacia una teoría de la instrucción. México: Ed. Litográfica Azteca S. A.

20. Budnich, F. (1995). Matemática aplicada para Administración, Economía y Ciencias Sociales. México: Mc. Graw- Hill.

21. Cedillo, T. (1994). Introducing Algebra With Programmable Calculators. Louisiana,, USA.: PME-NA XVI, Louisiana State University, Baton Rouge.

22. Cedillo, T. (1992). Exploring the Learning of Algebra under the Paradigm of Communication. R. Sutherland. USA: (Ed.), Working Group Algebraic Processes and Structure. XVI International PME Conference.

23. Comenio, J. (1983). Didáctica magna. Cuba: Pueblo y Educación.

24. D’Amore, B. (2000). Sobre la preparación teórica de los maestros de Matemática. Rev. RELIME, No. 1 (Vol. 3).

25. Dennie, G., & Dewar, J. M. (1996). Álgebra y Trigonometría (2da. ed.). México: Mc. Graw-Hill.

26. Dib, C. (1974). Tecnología da Educacão. Sao Paulo: Livraria Pionera.

27. Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in Mathematics. . In A.J. Bishop (ed.) Mathematical Knowledg: Its Growth Trough Teaching. Kluwer Academic Publishers Dordrecht.

28. Douroux, A. (1983). La valeur absolue: difficultes majeurs pou une notion mineure (Vol. 3). Petit X.

29. Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La Habilidad para cambiar el registro de representación. España: La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 9,(1), pp. 143-168.

30. Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Registro semiótico y aprendizajes intelectuales. México: D C. Universidad del Valle.

31. Duval, R. (1995). S´emiosis et pens´ee humaine: Registres s´emiotiques et apprentissage intellectuels. Suisse: Peter Lang.

32. Edwards, D. (2003). The Nature Of Mathematics As Viewed From Cognitive Science. ST. Mary's College of California. Retrieved from ledwards[arroba]stmarys-ca.edu.

33. Elkind, D. (1969). Conservation and Concept Formation. Nueva York: Elkind y Flavell (org.) Studies in Cognitive Development, Oxford University Press.

34. Ernest, P. (1998). Social constructivism as a philosophy of mathematics. Albany, New York: State University of New York Press.

35. Ernest, P. (1994). In response to professor Zheng. Philosophy of Mathematics Education Newsletter 7 (February) .

36. Evans, B. (1990). Uses of Technology in the Mathematics Curriculum. Cipher Systems.

37. Font, V. (2002). Una organización de los programas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. Revista EMA , 7 (2), pp. 127-170.

38. Fruedenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Mathematics Education Library, D.Reidel Publishing Company, Dordrecht .

39. Fuentes, H. (2001). Didáctica de la educación superior. Cuba: Centro de Estudios: Manuel F. Grant. Universidad de Oriente.

40. Galvis, A. (1978). Ingeniería de Software Educativo. Bogotá, Colombia: Universidad de Santa Fé.

41. García, L., Vázquez, R. A., & Hinojosa Rivera, M. (2004). Dificultades en el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de ingeniería. Cuba: Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica -UANL, Julio-Septiembre, Vol. VII, No. 24.

42. García, M. (2000). ¿Qué Matemática? Sevilla, España: Actas de las VIII Jornadas de Asepuma.

43. García, Z. (2002). Conferencia sobre el uso de la computación en Educación. Cuba: UCLV.

44. García, Z., & otros. (1997). Ponencia: Experiencias en el desarrollo de software educativos a través del uso de una máquina de inferencia. COMPUMAT´97.

45. Gargallo, B. (1995). Estrategias de aprendizajes. Estado de la cuestión. Propuesta para una intervención educativa. Rev. Teoría de la educación , vol. 7, pp. 53-76.

46. Gil, D., & Guzmán, O. M. (1993). Enseñanza de las ciencias y la Matemática. Popular S.A.

47. Godino, J. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. Recherches en Didactiques des Mathematiques, 26 (1): pp. 39-88.

48. Godino, J. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. Educational Studies in Mathematics, 60 (1): pp. 3-36.

49. Godino, J. (2003). Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Retrieved from URL: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_tfs.htm.

50. Godino, J. (2001). Análisis semiótico y didáctico de procesos de instrucción matemática. Versión revisada del trabajo presentado en la Reunión del Grupo "La Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica" Valladolid, España. III Simposio de la SEIEM. hltp://www.ugr.es/local/jgodino/semiotica.htm.

51. Godino, J.(1996). Mathematical concepts, their meaning, and understanding. Valencia: En: L. Puig y A. Gutierrez, (eds.), Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

52. González, J. (1998). Experimentos en Álgebra Lineal en Mathemática. Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. (No. 27).

53. González, A., & otros. (1997). El ordenador en el proceso enseñanza aprendizaje de las asignaturas Matemáticas Empresariales I y II. Málaga, España: Actas de las V, Jornadas de Asepuma.

54. González, F. (1994). Temas de educación matemática (ISBN 980-327-199-1).

55. Grossman, E. (1996). Álgebra Lineal (5ta. ed.). México: Editora Mc. Graw Hill.

56. Guillen, G. (2000). Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas. Rev. Enseñanza de las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas , 18 (No.1).

57. Guzmán, M. (2002). Tendencias innovadoras en la enseñanza de las matemáticas. Retrieved from www.oei.org.co/oeivirt/edumat.htm.

58. Hershkowitz, R. (2001). Acerca del Razonamiento en Geometría. PMME-UNISON.

59. Hitt, F. (2003). Le caract`ere fonctionnel des repr´esentations. Annales de Didactiqueet de Sciences Cognitives (Vol. 8). Strasbourg, pp. 255-271.

60. Hitt, F. (2003). The role of the external representations in the constructions ofmathematical concepts. L'educazione Matematica. Italia.

61. Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambiente con tecnología. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana. (Vol. X). No.2 Venezuela.

62. Hitt, F. (2002). Funciones en Contexto. España: Pearson Educación (Prentice Hall).

63. Hitt, F. (2002). Representations and Mathematics Visualization. México: International Group for the Psychology of Mathematics Education North American Chapter and Cinvestav-IPN.

64. Hitt, F. (1998). Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function. Journal of Mathematical Behavior (17(1)), pp. 123-134.

65. Hitt, F. (1994). Teachers' Difficulties with the Construction of Continuous and Discontinuous Functions (Vol. 16). Focus on Learning Problems in Mathematics. No.4, pp. 10-20.

66. Kraftchenko, O., & Hernández, H. (2000). Constructivismo en tres dimensiones. Vigotsky ¿constructivista? Revista Cubana de Educación Superior, Cuba , Vol. XX (No. 3.).

67. Kramarski, B., & Mevarech, Z. (2002). The Effects Of Metacognitive Instruction On Solving Mathematical Authentic Tasks. Educational Studies in Mathematics 49 , Kluwer Academic Publishers. USA: Printed in the Netherlands, pp. 225-250.

68. Labinowics, E. (1987). Introducción a Piaget. Pensamiento, Aprendizaje, Enseñanza. Addison – Wesley. Iberoamericana S. A.

69. Laborde, C. (2001). Impacto de las NTIC en la Educación. Retrieved from http://www.revistacandidus.com/revista/secs16/enfoque_candidus7_.htm.

70. Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being. New York: Basic Books.

71. Larson, R., & otros. (1995). Calculus of a single variable. USA: Editorial Heathand Company.

72. Lee, L., & Wheeler, D. (1989). The arithmetic connection. Educational Studies in Mathematics. 20, pp. 41-54.

73. Lehman, C. (1995). Álgebra. Editora Limusa, S.A. De C.V., grupo Noriega.

74. Liu, G. (2006). El uso de Materiales Educativos en la Formación del Pensamiento Matemático (Vol. 19). Lima, Perú: Colegio Villa María – La Planicie, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.

75. Loria, G. (1929). Storia delle Matematiche (Vol. I). Einaudi: Torino.

76. Malabar, I., Pountney, D., & Townend, M. (1998). Combining Visual and Symbolic Skills in the Teaching and Learning of Mathematics. Proceedings of the 3rd International Derive and TI-92 Conference, Gettysburg, Penn.

77. Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. Visión histórica. Rev. IRICE Instituto Rosario de Investigación en Ciencias de la Educación, Rosario. ISSN 0327-392X, Argentina (No. 13).

78. Mariotti, M. (1998). La intuición y la prueba: Reflexiones sobre los aportes de Fischbein. International newsletter on the teaching and learning of mathematical Proof. Noviembre /Diciembre.

79. Marquès, P. (1999). Orientaciones para el uso de materiales multimedia en el aula de informática. Retrieved from http://www.educared.net/aprende/softwareEducativo/index.htm.

80. Massimo, P. (1980). Language and Learning: The debate between Jean Piaget and Noam Chomsky, (traducción al inglés de la edición francesa Théories du langage, théories de l'apprentissage, Editions du Seuil, 1979). Massachusetts: Harvard University Press, Cambridge.

81. Mata, L. (1993). Aprendizaje significativo con línea de investigación. Maracaibo, Venezuela.

82. Mederos, O., & González, B. (1998). Procedimiento para el estudio de los conceptos. Memorias del III Taller Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura. ISPJAE. La Habana, Cuba.

83. Morris, A. (2002). Mathematical Reasoning: Adults' Ability to Make the Inductive–Deductive Distinction. Cognition and Instruction. 20 (1). Lawrence Erlbaum Associates, Inc. pp. 79-118.

84. Núñez, J. (1973). Introducción a la ciencia. Caracas, Venezuela: CM/Nueva Izquierda, Colección Texos Revolucionarios.

85. Okley, A. (1996). Fundamentos de Matemáticas Universitarias. México: Mc Graw Hill.

86. Panizza, M. (2006). Fenómenos Ligados A La Validación En Álgebra (Vol. 19). Argentina: Universidad de Buenos Aires, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.

87. Parasuraman, A., Zeithaml, V., & Berry, L. (1994). Reassessment of expectations as a Comparison Standard in Measuring Service Quality: Implications for Further Research. Journal of Marketing , vol.58 (January), pp. 111- 124.

88. Peel, E. (1971). Psychological an Educational Research Bearing on Mathematics Teaching. England: En Servais y Varga (ed.) Teaching School Mathematics. Middlesex, Penguin Books-UNESCO.

89. Pimienta, J. (2005). Matemáticas IV: Enfoque constructivista. España. Pearson. Retrieved from www.gandhi.com.mx/index.cfm/id/Producto/dept/libros.

90. Pimienta, J. (2001). Matemáticas III: Enfoque constructivista. España. Pearson. Retrieved from www.gandhi.com.mx/index.cfm/id/Producto/dept/libros.

91. Protti, O. (2008). La historia de las Matemáticas como instrumento pedagógico. Retrieved from www.cimm.ucr.ac.cr/aruiz/libros/Uniciencia/Articulos/Volumen2/Parte10/articulo19.html.

92. Radford, L. (2006). The anthropology of meaning. Educational Studies in Mathematicas, 61 (1-2): pp. 39-65.

93. Rodd, M. (2000). On Mathematical Warrants: Prof. Does Not Always Warrant, and a Warrant May Be Other Than a Prof. Mathematical Thinkimg And Learning. Lawrence Erlbaum Associates.

94. Rojano, T., & Sutherland, R. (1993). Towards an algebraic approach: The role of spreadsheets. XVII International PME Conference. Japan.

95. Romiszowski, A., & Mason, R. (1996). Computer mediated communication en Jonassen, DH. Hadbook on research for educational communications and Technology. New York Macmillan.

96. Royo, J., & et, al. (2005). Transferencia de Resultados. Taller con Docentes de Escuela Media. Universidad Nacional de Jujuy , Vol. 18. Argentina: Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.

97. Rubinstein, S. (1959). El pensamiento y los caminos de su investigación. Uruguay: Pueblos Unidos S. A.

98. Sáenz-Ludlow, A., & Presmeg, N. (2006). Semiotic perspectives on learning mathematics and communicating mathematically. Educational Studies in Mathematics 61 (1-2): pp. 1-10.

99. Saldanha, L., & Kieran, C. (2004). The slippery slope between equivalence and equality. Submitted for publication.

100. Sánchez, A. (1999). La enseñanza de la matemática asistida por computadora. Retrieved from www.utp.ac.pa/articulos/ensenarmatematica.html.

101. Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being – Or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. London: En, P. Cobb, E. Yackel y K. McCain, Symbolizing and Communicating in Mathematics Classroom. pp. 37- 97.

102. Skemp, R. (1980). Psicología del Aprendizaje. Madrid: Morata.

103. Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2007). Precálculo. Matemática para el cálculo (5ta ed.). México: Editorial Thomson.

104. Suárez, J. (2000). Perspectiva de las NTIC en la Educación Superior. Retrieved from http://www.ucatolicamz.edu.co/CampusVirtual/boletin/articulo1.html.

105. Talizina, N. (1988). Psicología de la enseñanza. Moscú: Progreso.

106. Tall, D., & Harel, G. (1990). The General, the Abstract, and the Generic in Advanced Mathematics. UK: University of Warwick. Coventry. CV4 7AL.

107. Tomàs, M., & et, al. (2000). El cambio de la cultura universitaria en el s.XXI: consecuencias en los procesos de E/A. Retrieved from http://dewey.uab.es/mtomas/consecue.htm.

108. Torres, M. (1994). Nuevas tendencias en la enseñanza de la ingeniería. Educ. Superior (No. 3), pp. 85 -86.

109. Urquijo, P. (1996). Pequeños creadores en Cuba. Cuba: Ciencias sociales.

110. Valdés, P. (2002). Diplomado para profesores sobre el uso de las TIC en la Educación Superior, Módulo 2: Ingeniería de Sistemas Educacionales soportados en las TIC. Cuba: Universidad Central de Las Villas.

111. Vaquero, A., Fernández, C., & Carmen, C. (1987). La Informática Aplicada a la Enseñanza. Madrid: Eudema S.A. p. 37.

112. Vera, F. (1970). Científicos Griegos (Recopilación, Estudio Preliminar, Preámbulos y Notas). Referencia a Diofanto de Alejandría (Vol. 2). México: Aguilar.

113. Vigotsky, L. (1987). Thinking and speech. The collected works of L.S. Vygotsky. Problems of General Psychology (Vol. 1). New York, USA: R. W. Riebe and A. S. Carton , Plenum Press. pp. 37-285.

114. Vigotsky, L. (1962). Thought and language. Cambridge (Mass.): MIT Press.

115. Waits, B., Longhart, F., & Longhart, K. (1998). Le Rˆole des Calculatrices Symboliques dans la Reforme de l'Enseignement des Mathematiques. Actes du Colloque Francophone Europ´een Calculatrices symboliques et g´eometriques dans l'enseignement des math´ematics. Monntpellier, France: (Dominique Guin eds.).

116. Walter, F., & Dale, V. (1991). Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica (3ra. ed.). España: Pearson, Prentice Hall.

117. Warner, S. (2001). Constenoble S. Applied Calculus. USA: Broooks/Cok.

118. Wertsch, J. (1991). Voices of the Mind: A Sociocultural Approach to Mediated Action. USA: Harvester Wheatsheaf.

119. Wertsch, J., & Stone, C. (1985). The concept of internalisation in Vygotsky's account of the genesis of higher mental functions. New York, USA: In Wertsch, J.V. Culture, Communication and Cognition. Cambridge University Press.

ANEXOS

Anexo 1: Evolución histórica del programa de la asignatura Álgebra Universitaria.

Tabla A.1: Evolución histórica del programa Álgebra Universitaria

Nombre del programa	Vigente Cuatrimestre (Año)	Características
Matemática I (001)	1er Semestre del 1984	• Se muestran los contenidos por semanas. • Contenido: Técnicas algebraicas fundamentales (productos notables, fracciones algebraicas, exponentes y radicales), funciones, ecuaciones e inecuaciones, análisis combinatorio, progresiones, matrices, sistemas de ecuaciones, sistemas de inecuaciones
Álgebra Universitaria (MAT 201)	Vigente hasta Agosto de 1988	• Los contenidos se organizan por temas. • Se eliminan algunos temas como: análisis combinatorio, Se comienza a trabajar por cuatrimestre.
Álgebra Universitaria (MAT 201)	Enero-diciembre del 1988.	• Se modifica el orden de impartir los temas. • Se incluyen los objetivos y contenidos por temas • Se incorporan temas (Relaciones, sucesiones y progresiones) ya eliminados y se elimina el tema de técnicas algebraicas fundamentales
Álgebra Universitaria (MAT 121)	Enero-Mayo de 1995	• Se eliminan algunos temas del programa.
Álgebra Universitaria (MAT 121)	Enero 1997	• Se mantienen los mismos temas. • Actualización de bibliografía • Carrera de informática con el nuevo pensum deja de tomar esta asignatura.
Álgebra Universitaria (MAT 121)	Enero 1998	• Se especifican datos generales, presentación de la asignatura, se agrupan los contenidos de forma diferente.
Álgebra Universitaria (MAT 121)	2004	• Eliminación de una bibliografía. • Programa actual.

Anexo 2: Síntesis del programa de la asignatura Álgebra Universitaria (MAT 121)

Asignatura: Álgebra Universitaria

Código: Mat-121

Créditos: 04

Pre-Requisito: MAT-100

Cuatrimestre: 02.

Carreras: Contabilidad, Mercadeo, Administración, Turismo, Publicidad, Diseño de Interior.

Duración: 15 semanas (60 horas)

PRESENTACIÓN:

Prepara al estudiante para la aplicación de los procedimientos matemáticos básicos para el estudio de otras asignaturas de niveles superiores que completan el perfil profesional del estudiante. Sus técnicas constituyen un poderoso recurso que sirven de modelo para resolver situaciones prácticas tales como por ejemplo problemas de oferta, costo, demanda, etc.

El contenido básico de la asignatura comprende esencialmente:

Ecuaciones lineales en una variable. Ecuaciones de segundo grado en una variable. Relaciones y funciones. Inecuaciones en una variable. Sistema de ecuaciones lineales. Matrices y determinantes. Análisis combinatorio. Sucesiones y progresiones.

OBJETIVOS GENERALES:

Al finalizar el programa estudiante:

- Resolverá ecuaciones de primer grado y segundo grado con una variable
- Resolverá problemas aplicando ecuaciones de primer y segundo grado
- Determinará el conjunto solución de inecuaciones en una variable
- Clasificará y graficará funciones algebraicas y trascendentes
- Resolverá sistemas de ecuaciones lineales
- Calculará la suma de N términos de progresión aritmética y geométrica
- Resolverá problemas del área de los negocios utilizando los contenidos de esta asignatura

UNIDADES

Unidad I: Funciones y ecuaciones algebraicas lineales.

Unidad II: Funciones y ecuaciones algebraicas cuadráticas.

Unidad I: Funciones y ecuaciones trascendentes.

Unidad IV: Inecuaciones.

Unidad V: Matrices y sistemas de ecuaciones lineales.

Unidad VI: Sucesiones y progresiones

Unidad VII: Análisis combinatorio

METODOLOGIA:

Las estrategias utilizadas para el logro de los objetivos incluyen los procedimientos y actividades siguientes, algunas de las cuales se van a desarrollar con el empleo de los asistentes matemáticos en laboratorios:

•Presentación y análisis del tema en conferencias interactivas.

•Discusiones grupales sobre el tema en talleres.

•Ejercicios de de aplicación para el desarrollo de las habilidades algebraicas operacionales.

•Asignación de tareas.

•Evaluación del tema y reforzamiento.

EVALUACION:

El método de evaluación (formativo y evaluativo) es continuo, se distribuirán los 100 puntos, durante todo el proceso, de la forma siguiente:

Tabla: Distribución de la puntuación por exámenes

	Primer Parcial	Segundo Parcial	Examen Final
Participación	5	5	-
Trabajos prácticos	5	5	-
Pruebines	5	5	-
Examen Parcial	20	20	-
Total	35	35	30

.

LIBRO DE TEXTO:

Stewart, James- Redlin, Lothar- Watson, Saleem. (2007). PRECÁLCULO. (5ta. Edición) México: Thomson.

LIBROS DE CONSULTAS:

1. Allen R., Ángel. (1994). ALGEBRA ELEMENTAL (3era. Edición) México:Editora Prentice Hall Hispanoamericana, S. A.
2. Zill, Dennis G. (1996). ALGEBRA Y TRIGONOMETRIA (2da Edición). Colombia: Mc. Graw Hill.
3. Miller, Charles- Heeren, Wern- Hornsby, John. (2006). MATEMATICA. (10ma. Edición). México: Pearson.
4. Galdós, L. (2000). MATEMATICAS. (3ra. Edición). España: Cultural SA.
5. Sullivan, Michael. (2000). TRIGONOMETRIA Y GEOMETRIA ANALITICA. (4ta. Edición). México: Prentice Hall.
6. Swokowoski, Earl- Cole, Jeffery. (2006). ALGEBRA Y TRIGONOMETRIA CON GEOMETRIA ANALITICA. (11va. Edición). México: Thomson.

DIRECCIONES ELECTRÓNICAS:

- Google. Descartes.
- Biblioteca virtual de UNAPEC.

www.mhhe.com/smithminton.
http://www.calculus-help.com/funstuff/phobe.html
http://mathforum.org/calculus/calculus.html
http://people.hofstra.edu/faculty/stefan_waner/realworld/tutorials/frames2_7.html
http://WW.karlscalculus.org/calculus.html#toc/
http://people.hofstra.edu/faculty/stefan_waner/realworld/tutindex.html
http://people.hofstra.edu/faculty/stefan_waner/realworld/calcumm6.html

Anexo 3: Encuesta a estudiantes de Álgebra Universitaria.

Objetivo: Caracterización de la metodología de enseñanza que utilizan los profesores, precisando la utilización de los medios audiovisuales y la incidencia de las computadoras en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Carrera: _____________ Sexo: ___________. Grupo: _______.

Cuatrimestre: _______________. Fecha: ___________.

Profesor: _________________ Asignatura: ____________.

Apreciado Estudiante:

Con el fin de elevar el nivel docente de nuestra universidad, cada cuatrimestre se realiza una evaluación profesoral. Esta se lleva a cabo a través de diferentes fuentes y una de ellas es la realizada a ustedes que están en contacto directo y continuo con sus profesores. Tus respuestas serán estrictamente confidenciales, por lo que esperamos que las mismas sean objetivas, sinceras y justas.

Instrucciones:

Al lado de cada pregunta aparecen números de 1 al 5. Encierra en un círculo el número que corresponde a la forma en que el profesor actúa habitualmente. El significado de los números es el siguiente:

5	4	3	2	1
Siempre	Casi siempre	A veces	Casi nunca	Nunca

1. El desarrollo de la clase es a través de las explicaciones del profesor.	5 4 3 2 1
2. Utilizan algún medio audiovisual para impartir las clases.	5 4 3 2 1
3. Utiliza algún software como herramienta para facilitar la mejor comprensión de la clase.(asistentes matemáticos)	5 4 3 2 1
4. Su método de enseñanza hace la clase más dinámica y motivante.	5 4 3 2 1
5. Asigna alguna tarea extra clase donde deban usar las computadoras para auxiliarse en su solución.(asistentes matemáticos)	5 4 3 2 1

Anexo 4: Entrevista a los profesores de la Universidad APEC que imparten la materia de Álgebra Universitaria.

Objetivo: Conocer el trabajo metodológico que se lleva a cabo en la asignatura Álgebra Universitaria en UNAPEC.

1. ¿Cuántos años de experiencia posee en Educación?
2. ¿Qué tiempo lleva dando clase de Álgebra?
3. ¿Al introducir el nuevo tema, lo hace planteando situaciones relacionadas con el entorno del estudiante?
4. ¿Se apoya para impartir sus clases en algún medio audiovisual?
5. ¿Qué tipo de actividades diseña para que el estudiante se apropie del conocimiento nuevo impartido?
6. ¿Qué tipo de actividades diseña para la ejercitación de los estudiantes en el contenido impartido?
7. ¿Cuál es la forma de evaluación que utiliza?
8. ¿El estudiante se ve motivado en la clase? ¿Qué recomienda hacer?
9. ¿El estudiante reproduce o llega a conclusiones solo?
10. ¿Cómo valoras las orientaciones metodológicas que has recibido en sentido general sobre la materia que impartes?

Muchas gracias por su colaboración, mediante las respuestas, donde no se trata de evaluarlo, sino tener elementos para caracterizar y diagnosticar el trabajo metodológico de la asignatura Álgebra Universitaria.

Anexo 5: Exámenes realizados a los estudiantes en las diferentes etapas del cuatrimestre.

UNIVERSIDAD APEC. UNAPEC

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PRIMER EXAMEN PARCIAL DE ÁLGEBRA UNIVERSITARIA, MAT-121

NOMBRE: ___________________________________MAT:______________

PROF: _______________________GRUPO:____________FECHA:_______

I._ Desarrolla y selecciona la respuesta correcta: (Valor 6 puntos.)

1) La ecuación cuadrática cuyas raíces son $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{3}{5}$ es __________
2) La naturaleza de las raíces de la ecuación $x^2 - 6x + 8 = 0$ es _________
3) Al despejar <u>a</u> de $v_o = v + a\,t^2$ el resultado es______________
4) La longitud del intervalo $-2 \leq x \leq 5$ es ___________________
5) El punto medio del intervalo $[-6,2]$ es ___________________________
6) El valor de <u>k</u> de modo que –2 sea una raíz de la ecuación $3x^2 + k\,x + 1 = 0$ es ________________

II.- Resuelve las siguientes ecuaciones: (Valor 6 puntos)

1) $5(x + 2) - 3x = -2 - [4x - (5x - 1)]$
2) $\sqrt[3]{2x+4} - 3 = -1$
3) $x^2 + 12x + 35 = 0$

III.- Resuelve la siguiente inecuación y representa gráficamente la solución: (Valor 4 puntos.)

1) $|2x + 6| \leq 4$

2) $x^2 + 7x + 12 > 0$

IV.- Resuelve las siguientes situaciones problemáticas: (Valor 4 Puntos.)

a) Encuentra tres números enteros consecutivos cuya suma sea 48.
b) La base de un triangulo es 3 cm mas largo que la altura. Si el área s 119 cms^2, halla el valor de la base y la altura.

UNIVERSIDAD APEC
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
SEGUNDO PARCIAL DE ÁLGEBRA UNIVERSITARIA (MAT – 121)

Nombre: ____Matrícula________________

Grupo: _____________Fecha: ______________Profesor: ______________________________

Tema I. Completa los espacios en blanco con la respuesta correcta. (Valor: 5 puntos)

1. La inversa de la función f(x) = $\sqrt[3]{2x+3}$ es _______________
2. Sólo las funciones _________________ tienen inversa.
3. La matriz diagonal en la que todos los elementos de la diagonal principal son iguales se llama ______________
4. Una función cuyo dominio de imagen es un único elemento se llama función ________________
5. La función __________________ es la inversa de la función exponencial.

Tema II. Dados los conjuntos: A = {1, 2, 3, 4} y B = = {3, 5, 7} con una relación de A en B y el enunciado formal "x + y es primo" determina:

a) Conjunto solución
b) Dominio de la relación
c) Representa la relación en

Tema II. (Valor: 6 puntos)
Considera las matrices siguientes.

A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$; B = $\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ y C = $\begin{bmatrix} 9 & -1 & 7 \\ -2 & -8 & 6 \end{bmatrix}$

Determina (si es posible)

1) $A^t + C$
2) $A - 3C^T$
3) B x C

Tema IV. Resuelve y representa la solución gráficamente.
$x^2 - 9x + 14 \geq 0$

Tema V. Resuelve cada ecuación propuesta.

1) $\frac{3^{2x-8}}{27} = 1$ 2) $\log_4(9x) - \log_4(4x - 2) = 2$

Tema IV. Traza la gráfica de la función g(x) = $-x^2 + 2x + 10$ en el dominio $[-2, 4]$

UNIVERSIDAD APEC Modelo A

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Examen Final de Álgebra Universitaria (Mat 121)

Nombre: ____Matrícula_______________

Grupo: ____________Fecha: _____________Profesor: ____________________________

Tema I. Completa los espacios en blanco con la respuesta correcta. (Valor: 5 puntos)

1. El trigésimo término de la progresión 2, 7, 12, 17,… es _____________

2. Cuando despejamos h en la ecuación A = 2πr (r + h) resulta ________________

3. El sistema de ecuaciones lineales ________________________ siempre es consistente pues admite por lo menos la solución trivial.

4. En la progresión _____________________ cada término posterior al primero se encuentra multiplicando el término anterior por una cantidad fija llamada razón de la progresión.

5. Un sistema de ecuaciones lineales que carece de soluciones se llama ______________________

Tema II. (Valor: 6 puntos)

Considera las matrices siguientes.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 7 \\ -2 & -8 & 6 \end{bmatrix} \text{ y } \quad D = \begin{bmatrix} x+1 & -4 \\ 2 & -2y+4 \end{bmatrix}$$

Determina (si es posible)

1) $A^t - 3C$

2) B x C

3) Los valores de x e y para que las matrices B y D sean iguales.

Tema III. Resuelve y representa la solución gráficamente. (Valor: 2 puntos)

$|4x-12| \leq 8$

Tema IV. Resuelve cada ecuación propuesta. (Valor: 6 puntos)

1) $\frac{3^{2x-8}}{27} = 1$

2) $\log_4 (9x) - \log_4 (4x - 2) = 2$

3) $3\sqrt{x-6} + 5 = 11$

Tema V. Analiza el sistema de ecuaciones lineales siguiente y si es consistente encuentra al menos una solución. (Valor: 5 puntos)

$$\begin{cases} 4x - 2y - z = -4 \\ x + 2y + z = -6 \\ 2x - y + 3z = 19 \end{cases}$$

Tema VI. Traza la gráfica de la función $g(x) = -x^2 + 2x + 10$ en el dominio $[-2, 4]$, (Valor: 3 puntos)

Tema VII. El primer y último término de una progresión aritmética son 2 y 62 respectivamente. Determina cuántos términos tiene la progresión si la suma de sus términos es 416. (Valor: 3 puntos)

Anexo 6: Prueba pedagógica sobre conceptos de Álgebra .

Objetivo: Determinar el uso de registros semióticos para representar los conceptos, el nivel de de la formación conceptual que tienen los estudiantes y su utilización en aplicaciones matemáticas.

1. Resuma con sus palabras que entiende por función y por ecuación.
2. Escriba debajo de cada uno de los siguientes conceptos, que caracteriza a los mismos y de un ejemplo y grafíquelo:

Funciones Lineales	Funciones Cuadráticas

3. Que diferencias existen entre una ecuación y una inecuación.
4. Responda Verdadero o Falso a las siguientes preguntas y explique su respuesta.
   a) La ecuación cuyas raíces son x_1 = -3, x_2 = 7 es $X^2 - 3X + 7 = 0$.____
   b) Al determinar el dominio de una función que tiene denominador la solución son todos los reales con las X diferentes a los valores que hagan cero al denominador.________
   c) Las inecuaciones tiene un solo valor como solución de la misma. _______
   d) Una función tiene inversa si esta es sobreyectiva. ________
   e) Para multiplicar matrices el número de filas de la primera tiene que ser igual al número de columnas de la segunda.__________
5. Grafique la función $f(x)= x^2 + 3x - 5$ para su dominio [-2,2].
6. Escriba en lenguaje algebraico, las siguientes situaciones presentadas en lenguaje coloquial.
   a) El doble de un número aumentado en tres es equivalente a la mitad del mismo numero.
   b) La suma de los cuadrados de dos números diferentes.
   c) El cuadrado de la suma de dos números diferentes.
   d) La tercera parte de un número disminuido en dos es igual al triplo del mismo numero aumentado en cuatro.

Anexo 7: Guía para la observación de una clase.

Objetivo: Identificar los comportamientos de profesores y estudiantes en la clase con énfasis en los estudiantes y determinar el uso de los medios audiovisuales, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura Álgebra Universitaria en UNAPEC

Asignatura: _________________________________ Código: ______

Profesor: ___________________________________

Grupo: ______________ Horario: _______________

Cantidad de estudiantes: _________.

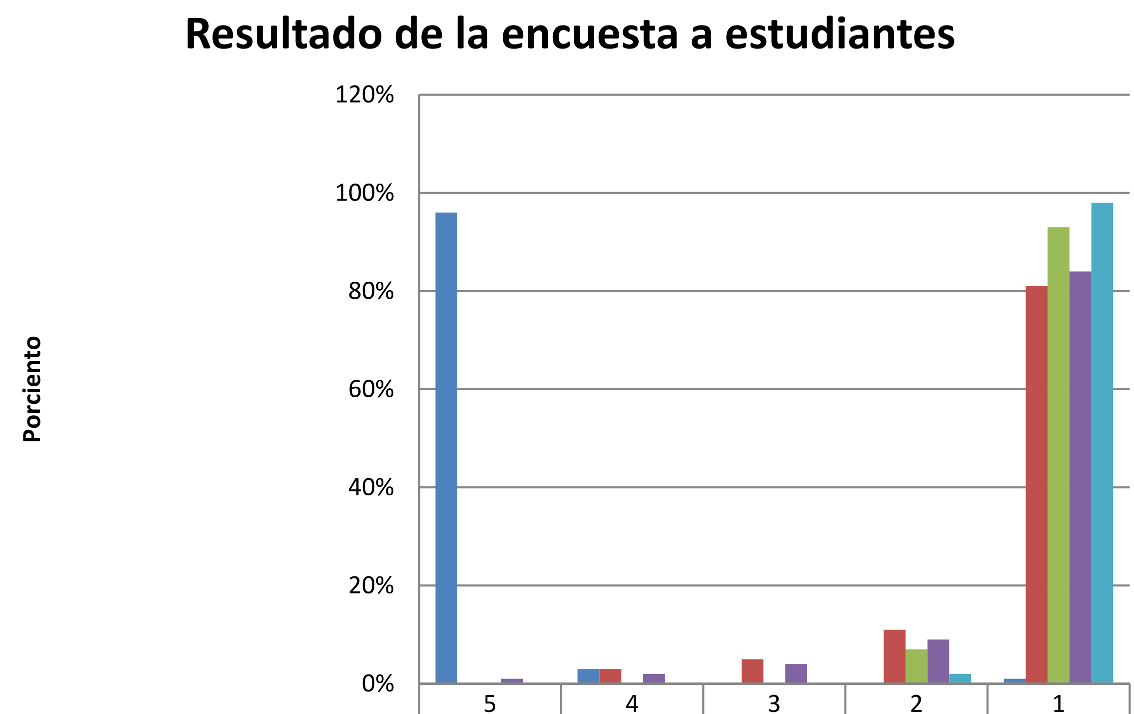
a) Papel que desempeña el profesor en la clase.
b) Forma de aplicación de los contenidos impartidos como herramienta de la Matemática.
c) Utilización de medios audiovisual en la clase.
d) Actitud del estudiante durante la clase.
e) Independencia de los estudiantes en la actividad realizada.
f) Atención mostrada por los estudiantes a los medio audiovisual usado.
g) Interés mostrado por los estudiantes en la participación en clases.
h) Clima sicológico logrado en la clase.
i) Ajuste al tiempo de la clase.
j) Correspondencia de los objetivos con los ejercicios propuestos en la clase.
k) Posibilidad de los estudiantes en hacer generalizaciones en la clase.
l) Conocimiento previo de los estudiantes sobre el contenido tratado.
m) Posibilidad de expresión y ejemplificación de los conceptos tratados por los estudiantes en clase.

Anexo 8: Comparación de los resultados académicos de los estudiantes en el período mostrado.

Tabla: Comparación de los resultados académicos de los estudiantes en el periodo mostrado.

Períodos	Enero - Abril 2007	Mayo – Agosto 2007	Sept. – Dic. 2007
Número de grupos	20	20	21
Estudiantes inscritos	649	654	624
Retirados	01	01	-
% Reprobados	21.5	5.4	20.1
Retirados Adm.	30	62	32
Estudiantes Finalizan	303	388	339
Aprobados	196	246	216
% Aprobados	64.7	63.4	63.7
% Máximo - Grupo	76.9/1020	88.9/0323	86.4/1022
% Mínimo - Grupo	16.7/0320	40/1128	17.6/1322

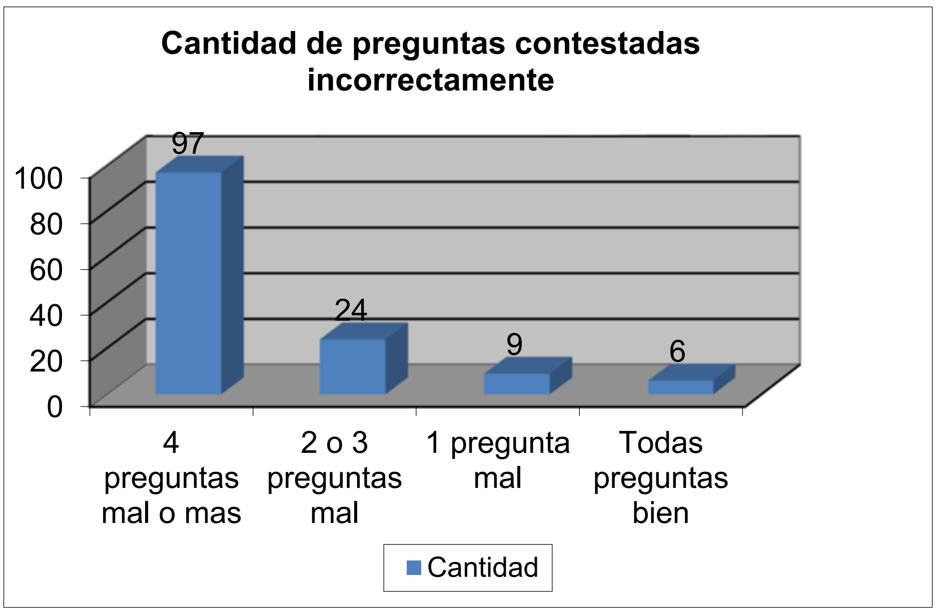
Anexo 9: Resultados de la encuesta aplicada a los estudiantes



	5	4	3	2	1
1. El desarrollo de la clase es a través de las explicaciones del profesor	96%	3%	0%	0%	1%
2. Utilizan algún medio audiovisual para impartir las clases.	0%	3%	5%	11%	81%
3. Utiliza algún software como herramienta para facilitar la mejor comprensión de la clase.(asistentes matemáticos)	0%	0%	0%	7%	93%
4. Su método de enseñanza hace la clase más dinámica y motivante.	1%	2%	4%	9%	84%
5. Asigna alguna tarea extra clase donde deban usar las computadoras para auxiliarse en su solución.(asistentes matemáticos)	0%	0%	0%	2%	98%

Anexo 10: Tabla de resultados de la aplicación de la prueba conceptual

Respondieron	Cantidad	%
4 preguntas mal o más	97	71.3
2 o 3 preguntas mal	24	17.7
1 pregunta mal	9	6.6
Todas preguntas bien	6	4.4
Total	136	100



Anexo 11: Tareas tipo a desarrollar en cada fase de la metodología

Tareas de la materialización en diferentes RRS para analizar los rasgos esenciales.

A. Funciones:

Es necesario que los estudiantes interioricen la necesidad de identificar los valores para los cuales una función no está definida, o en otras palabras determinar el dominio ya que se requiere para que los estudiantes puedan usar las funciones en su carácter de elementos esenciales del lenguaje matemático. Por lo cual se requieren plantear tareas como las siguientes:

I. Para las siguientes funciones:

f(x) = $\frac{x}{x-1}+\frac{\sqrt{x}}{x+2}$

f(x) = $\frac{24}{10-x}+\frac{24}{10+x}$

f(x) = $log(x+1)-\frac{x}{\sqrt{x+9}}$

f(x) = $\sqrt{x+8}-\frac{x-2}{e^x-1}$

a) Determina el dominio.
b) Represéntalas gráficamente utilizando el asistente matemático.
c) Argumenta las características del gráfico en pantalla de acuerdo a los resultados del dominio obtenido analíticamente

.

Realizar trabajo con funciones donde se requiera tener en cuenta la definición del dominio y determinar el recorrido usando las desigualdades, lo cual contribuye al dominio del concepto de función e interrelacionar el mismo con el trabajo con desigualdades:

II. Tarea: Para las siguientes funciones:

f(x) = 2x + 3 para 3 < x < 8

f(x) = 3x – 5 para -2 < x < 4

f(x) = -4x + 6 para 3 < x < 9

f(x) = -3x – 7 para -4 < x < 5

etc.

a) Determina el recorrido.
b) Represéntalas gráficamente utilizando el. asistente matemático.
c) Argumente las características del gráfico en pantalla y su correspondencia con el recorrido de la función.

También en el trabajo con las funciones se requiere tener en cuenta las funciones definidas por más de una fórmula, dada la fuerte preconcepción formada en el estudiante en la enseñanza precedente al trabajar con funciones definidas por una sola fórmula. Por lo tanto se requiere propiciar que el estudiante trabaje con funciones definidas por más de una fórmula para garantizar su formación conceptual sobre las funciones.

III. Tarea: Evalúe las funciones en los valores dados, clasifíquelas en inyectiva, sobreyectiva y biyectiva y haga la gráfica de la función utilizando el asistente matemático. Establezca la correspondencia entre los resultados analíticos obtenidos y la representación gráfica. Si no hay correspondencia rectifique su análisis apoyándose en el gráfico obtenido.

1.

$$F(x)=\begin{cases} 2x & \text{si } 0 < x < 4 \\ x + 1 & \text{si } 4 \le x < 8 \\ 4 & \text{si } 8 \le x \end{cases}$$

Evaluar para x = 1, 2, 4, 4.7, 6, 8, 10,100

2.

$$F(x)=\begin{cases} x + 2 & \text{si } 0 < x < 3 \\ x & \text{si } 4 \le x < 8 \\ x + 2 & \text{si } 8 \le x \end{cases}$$

Evaluar para: x = 5, 2, 3, 5, 7, 8,15, 25, 1243

Se usará el asistente matemático tanto para apreciar gráficamente la correspondencia del dominio con el recorrido como la monotonía de cada función, el trabajo abundante con el asistente matemático permite al estudiante identificar por sí mismo el requerimiento analítico para que la función lineal sea creciente o decreciente.

B. Sistemas de ecuaciones lineales:

Uno de los problemas conceptuales de los estudiantes en el tema de ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales es el hecho de que los estudiantes tienden a dividir por una de las variables, lo que los conduce a perder soluciones. Esto es un preconcepto creado por el propio quehacer matemático dado que es lícito dividir una igualdad miembro a miembro por un mismo valor. Otro preconcepto es que los estudiantes usan de forma exclusiva las letras “x” y “y” como variables en los sistemas de ecuaciones, lo cual los limita en el trabajo algebraico. Por lo cual es necesario desarrollar tareas en las cuales las ecuaciones vengan dadas en el mismo registro semiótico, pero utilizando diferentes representaciones.

Escribir los sistemas con letras diferentes a “x” y “y” como variables es necesario para que el estudiante independice el objeto matemático de una representación semiótica en particular y contribuir al desarrollo de su generalización teórica.

Tarea: Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{array}{c} p + q = -p \\ pq = q \end{array}$$

En este caso al dividir por q en la segunda ecuación obtienen la solución p = 1, q = -2, pero pierden la solución p = 0, q = 0.

C. Trabajo con Matrices:

El trabajo con matrices es en sí mismo una generalización de las operaciones algebraicas pues se realizan las operaciones clásicas suma, resta y multiplicación pero ahora con elementos compuestos por conjuntos de elementos que antes eran los protagonistas de las mencionadas operaciones. Aquí en particular el producto aporta a la formación de los estudiantes en lo que respecta a la generalización teórica debido a que debe abandonar la creencia de que el orden de los factores no altera el producto, ya que en el caso del producto de matrices sí lo altera; pues este no es conmutativo. Dada la trascendencia de este hecho en lo que respecta al dominio conceptual del producto en Matemática se debe trabajar con cierto detenimiento. En primer lugar mediante el uso del asistente matemático se pueden generar matrices de la forma: $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ o bien las cuales son conmutativas respecto al producto, pero no así todas las matrices, por lo que al hacer varias operaciones con este tipo de matrices, el estudiante pueda apreciar que las generalizaciones en Matemática no pueden ser a partir de un número de casos comunes, sino de los elementos esenciales que caracterizan al fenómeno, lo cual se ilustra con la multiplicación de otras matrices que no cumplen la conmutatividad. El asistente matemático posibilita desarrollar de forma dinámica muchos ejercicios que muestran que el hecho de que un resultado se repita un número n de veces no garantiza que siempre se vaya a cumplir lo que posibilita contrastar la intuición con la generalización. Preguntas como, ¿siempre va a pasar? ¿Es seguro que esto se cumple? Son importantes para la comprensión del producto en la Matemática.

Tarea: Efectuar el producto de las siguientes matrices.

$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 1.5 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 1.5 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

¿Es conmutativo el producto de estas matrices? ¿Es conmutativo el producto de matrices?

Tareas de recodificación para la coordinación entre registros semióticos

Este tipo de tarea se desarrolla con el asistente matemático para que el estudiante realice la recodificación entre RRS. Se utiliza la representación gráfica para extraer la información relativa a los rasgos esenciales del objeto matemático y utilizarla posteriormente en el lenguaje algebraico y/o el lenguaje literal; lo cual es parte de la formación del nexo símbolo-objeto del cual depende el la apropiación conceptual del estudiante.

A. Funciones

I. A partir de los gráficos dados determine:

a) Cuáles representan funciones.

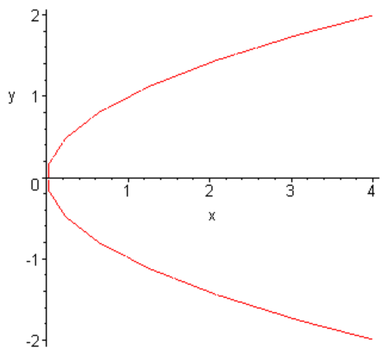
Para las que representen funciones:

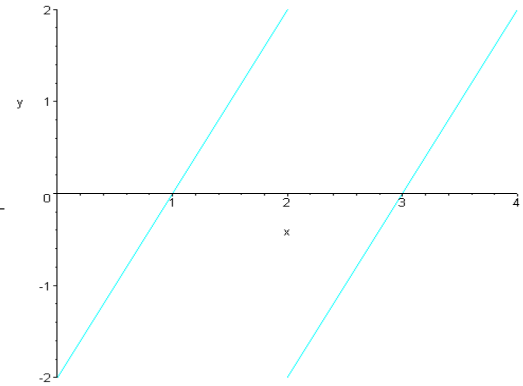
b) Escribir la expresión analítica de la función.

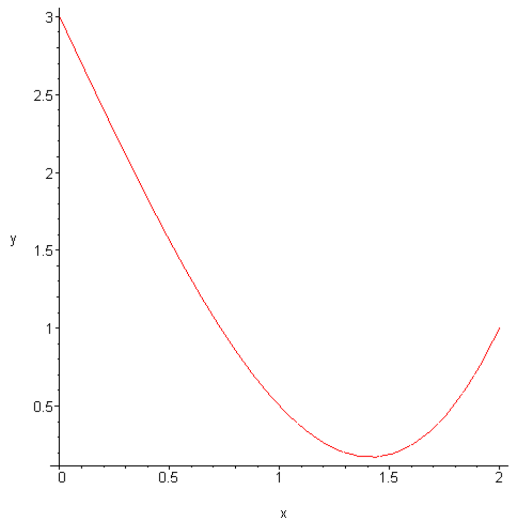
c) Sus intervalos de monotonía.

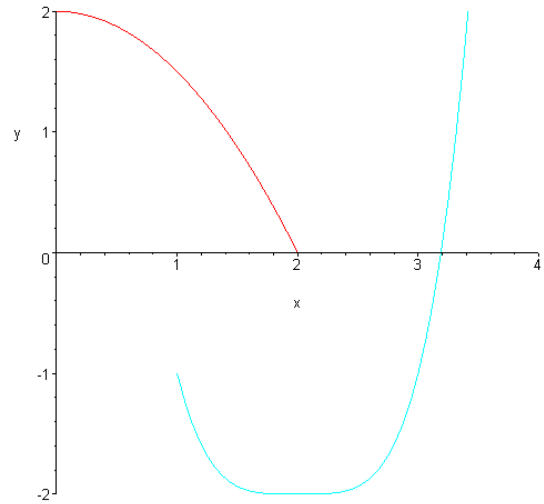
d) Dominio y recorrido.

e) Decir si es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva, según el dominio y recorrido de cada una.









1. Los gráficos se proyectan en una pantalla, se entregan en papel o se dibujan en la pizarra.

2. Los estudiantes trabajarán con el asistente matemático para verificar sus propuestas analíticas y trabajarán de forma interactiva hasta obtener la respuesta correcta. El Asistente Matemático permite presentar una variedad considerable de gráficos en poco tiempo, lo cual agiliza el proceso docente incrementando la actividad del estudiante.

3. Este trabajo lo desarrollarán en pequeños grupos (dúos o tríos).

4. Es necesario insistir en gráficos que no representen funciones, dado que los estudiantes tienen el preconcepto de que cualquier gráfico es una función.

B. Sistemas de ecuaciones lineales

I. Utilizar el asistente matemático para graficar sistemas de ecuaciones lineales con solución única, sin solución y con infinitas soluciones con los objetivos de:

a. Que el estudiante pueda pasar de la representación semiótica gráfica a la analítica.

b. Que el estudiante pueda materializar mediante la semiótica gráfica por qué los sistemas de ecuaciones lineales pueden tener solución única, ninguna o infinitas.

c. Que el estudiante pueda identificar cuando el sistema lineal tiene una ninguna o infinitas soluciones, independientemente de cómo esté representado el sistema.

Tarea: Agrega una ecuación a 5x + 3y = 15 de modo que obtengas un sistema de ecuaciones lineales con dos variables que tenga:

a) una solución. b) ninguna solución. c) infinitas soluciones.

Comprueba las soluciones propuestas utilizando el asistente matemático para graficar los sistemas propuestos en cada caso.

II. La resolución de inecuaciones se debe hacer analíticamente usando las propiedades de las inecuaciones y gráficamente para que el estudiante pueda apreciar el fenómeno en diferentes semióticas, lo cual le permite una mejor comprensión del mismo y además independizarlo de una semiótica particular.

Ejemplos: Determinar el conjunto solución: $\frac{3x}{5} - \frac{7}{10} + \frac{x}{20} > \frac{1}{5} + \frac{7x}{20}$

El proceso analítico es sencillo, quitar denominadores y aislar la variable con lo que se obtiene x > 4.5, pero se debe usar el asistente matemático para graficar la parte derecha e izquierda de la inecuación en un mismo gráfico de modo que se pueda apreciar que la desigualdad se cumple a partir del valor indicado para la x.

De la misma forma se procede con las siguientes tareas:

1. Determinar el conjunto solución:

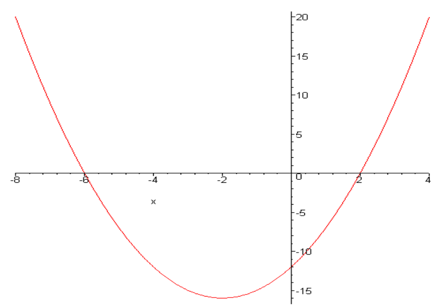
a) $\frac{4x+10}{9} + 5 + \frac{2x}{3} < \frac{7x}{6} + 54x$

b) $\frac{3x}{2} + \frac{21}{10} > \frac{3x}{5} + 4x - x$

III. Con las inecuaciones de 2do. grado se debe seguir el mismo procedimiento, asociar el procedimiento analítico con la representación gráfica, ya que el cambio de semiótica es parte inherente a la formación conceptual.

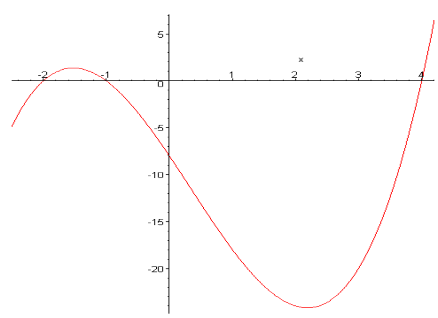
Tarea: Determinar el conjunto solución de: $x^2 + 4x - 12 < 0$.

La solución analítica se obtiene de escribir la desigualdad descompuesta en factores $(x + 6)(x – 2) < 0$ que tiene solución cuando los factores tienen signos contrarios esto es para $-6 < x < 2$, como se aprecia en el gráfico:



Determinar el conjunto solución de: $(x+1)(x+2)(x-4) > 0$

La solución analítica se obtiene cuando todos los factores son positivos o un número par de ellos es negativo, con lo que se obtiene la solución: $-2 < x < -1$ y $x > 4$, lo cual se corresponde con el gráfico:



Tareas para consolidar las relaciones del Álgebra

Este tipo de tareas está dirigido a que el estudiante consolide las relaciones del Álgebra (objeto-proceso, variable-parámetro y el carácter singular-general del objeto algebraico).

I. Para comprender la relación dialéctica objeto-proceso se requiere realizar varios ejercicios en los cuales sea necesario identificar un objeto matemático dentro del desarrollo de un proceso algebraico.

Tarea: Hallar soluciones enteras de ecuaciones lineales en dos variables como: 35x + 8y = 143

En este tipo de ejercicios es necesario despejar una de las variables, digamos y; $y = \frac{143-35x}{8}$ donde separamos lo que es divisible por 8 de la siguiente manera: $\mathrm{y} = 17 - 4\mathrm{x} + \frac{7-3\mathrm{x}}{8}$ donde se requiere interpretar $\frac{7-3x}{8}$ como un objeto, el que debe ser entero para que "y" lo sea, por lo tanto asignándole al numerador un valor entero de x que lo haga múltiplo de 8 obtenemos soluciones enteras para dicha ecuación, digamos x = 5 con lo cual dicho objeto toma el valor -1, con lo que se obtiene y = -4.

II. Para comprender **la dialéctica variable-parámetro** se requiere hacer un trabajo interactivo con el asistente matemático de modo que el estudiante pueda apreciar la influencia de cada uno de estos elementos en el objeto matemático. Una actividad ilustrativa al respecto es la representación de familias de gráficos de curvas. En este caso lo ejemplificaremos con rectas y parábolas, para que se pueda apreciar y entonces interpretar la influencia de las variables y parámetros en los gráficos de dichas curvas.

Tarea: Dado y = ax + b, y = ax^2 + bx + c

a) Asignar valores al parámetro "a". Repetir con los parámetros "b" y "c". Incluya valores positivos, negativos y nulo.
b) Representarlo gráficamente utilizando el asistente matemático.
c) Identificar el comportamiento de las curvas de acuerdo a la variación de cada parámetro.
d) Asignar valores a la variable "x". Incluya valores positivos, negativos y nulo.
e) Representarlo gráficamente utilizando el asistente matemático.
f) Identificar el comportamiento de las curvas de acuerdo a la variación de la variable.
g) Compare el efecto en los gráficos producidos por las variaciones entre los parámetros y las variables.

III. Para que los estudiantes puedan intuir la descomposición en factores del trinomio cuadrático y trabajar con diferentes representaciones en un mismo tipo de registro semiótico para así independizar el trinomio y su descomposición de una semiótica asociada a símbolos particulares. Este tipo de ejercicio consolida la relación variable-parámetro, promoviendo a su vez la generalización.

Utilizar el asistente matemático para descomponer en factores binomios cuadráticos de la forma:

a. $x^2 - 5x + 6$
b. $x^2 - 7x + 12$
c. $x^2 - 8x + 16$
d. $x^2 + 3x - 4$
e. $x^2 + (a+b)x + ab$
f. $x^2 + (2e+f)x + 2ef$
g. $x^2 + (b+3h)x + 3bh$

Tareas de sistematización

1. Resolver: $x^4 – 13x^2 + 36 = 0$.

Una vez que el estudiante interpreta correctamente la relación objeto–proceso, está en condiciones de identificar en el proceso de resolución de la ecuación planteada el objeto x^2, el cual puede representar por una variable auxiliar, esto es $y = x^2$ reescribiendo la ecuación en términos de la nueva variable: $y^2 -13y + 36 = 0$, la cual se descompone en: $(y – 4)(y – 9) = 0$, desde donde igualando cada factor a cero y regresando a la variable original se obtienen las soluciones: $x = \pm 2$; $x = \pm 3$.

En este tipo de ejercicios se relacionan las ecuaciones de 4to grado con ecuaciones de 2grado para obtener su solución, tomando en cuenta que debe tener 4 raíces.

2. Resolver: $(x-5)(x-7)(x+6)(x+4) = 504$.

Haciendo las mismas consideraciones que para el ejemplo anterior, la solución se logra escribiendo la ecuación en la forma: $[(x^2-x) – 20]\,[(x^2-x) -42] = 504$ identificando: (x^2-x) como un objeto que se designa por $y = (x^2-x)$, lo cual permite obtener una ecuación clásica de 2do. Grado con solución directa, lo cual nos permite formar las ecuaciones: $x^2-x = 56$ y $x^2-x = 6$ que también se resuelven de forma directa.

3. Para que valores de “m” la ecuación: $x^2 -2x (1+ 3m) + 7(3 + 2m) = 0$, tiene raíces iguales.

Una vez que el estudiante ha interiorizado el concepto de solución de una ecuación e interpretado correctamente la relación “variable–parámetro”, está en condiciones de usar el álgebra para responder la pregunta planteada, además en el proceso de resolución de la tarea planteada el estudiante debe identificar: $-2(1+3m)$ y $7(3+2m)$ como objetos que representan la suma y el producto respectivamente del opuesto de las raíces de la ecuación, x_1, x_2; pero como en este caso las raíces son iguales, se tiene que $(1+3m)^2 = 7(3+2m)$ que nos da las soluciones: m = 2 y m = -10/9, que sustituidas en la ecuación nos dan las raíces dobles 7 y $-7/3$.

Orientaciones: puede asignarle valores arbitrarios a K y graficarlo con el asistente matemático para estudiar qué sucede, utilizando esta información como orientación en el proceso de solución analítica del problema.

Las relaciones de las raíces con la ecuación de 2do grado, es decir, cómo tienen que ser la ecuación para que las raíces tengan determinadas características.

a) Una vez resuelto el problema analíticamente comprobar el resultado gráficamente con el asistente matemático.

4. Dada la ecuación: $x^2 -4x + k = 0$, determinar cuáles deben ser los valores de "k" para que la ecuación tenga raíces reales. Orientaciones: puede asignarle valores arbitrarios a "k" y graficarlo con el asistente matemático para estudiar qué sucede, utilizando esta información como orientación en el proceso de solución analítica del problema.

Una vez resuelto el problema analíticamente comprobar el resultado gráficamente con el asistente matemático.

Aquí como en el ejemplo anterior el estudiante debe haber interiorizado el concepto de solución de una ecuación e interpretado correctamente la relación variable–parámetro, para estar en condiciones de usar el Álgebra para responder la pregunta planteada.

Al identificar los valores de "k" pedidos no se tiene la solución de la ecuación dada, sino una familia de ecuaciones de 2do. Grado con raíces reales, lo cual caracteriza la función del parámetro, lo cual el estudiante debe distinguir de el hecho de encontrar valores de la variable, que son soluciones de la ecuación en particular, aquí también está presente el carácter singular y general de objeto algebraico, dado que $x^2 -4x + k = 0$ es singular como objeto algebraico y a su vez representa toda una variedad de ecuaciones con determinados elementos comunes. Además como para que la ecuación tenga raíces reales tiene que ser $16 – 4k \geq 0$ se interrelaciona este tema con el de inecuaciones, cuya solución nos da $k \leq 4$.

Es formativo que el estudiante genere diferentes ecuaciones de acuerdo a la restricción del parámetro y las resuelva con el Derive, no tanto por la comprobación de su resultado en sí, sino para que pueda apreciar la función del parámetro en contraposición a los valores de la variable.

5. Determine el valor de “k” de modo que la ecuación $x^2 + 4kx + k + 2 = 0$, tenga una raíz nula.

El tratamiento metodológico de este ejemplo es como el anterior, su ejecución depende de la buena interpretación variable–parámetro. Para que la ecuación de 2do grado tenga una raíz nula es necesario que su término independiente sea nulo, o sea $k + 2 = 0$, de donde: $k = -2$.

Orientaciones: puede asignarle valores arbitrarios a k y graficarlo con el asistente matemático para estudiar qué sucede, utilizando esta información como orientación en el proceso de solución analítica del problema.

Una vez resuelto el problema analíticamente comprobar el resultado gráficamente con el asistente matemático.

6. Determine el valor de “k” de modo que la ecuación: $4x^2 - 8kx + 9 = 0$, tenga raíces que se diferencien en 4 unidades.

El cual se trata como los dos anteriores, con la diferencia de que la solución pasa por la resolución de un sistema lineal, donde la “k” que funciona como parámetro en la ecuación cuadrática se convierte en variable en el sistema, ya que de la suposición de que las raíces son de la forma “r” y “r + 4”, tenemos:

$$r + (r + 4) = 2k$$

$$r(r + 4) = 9/4$$

de donde se obtiene: $k = \pm (5/2)$.

Orientaciones: puede asignarle valores arbitrarios a K y graficarlo con el asistente matemático para estudiar qué sucede, utilizando esta información como orientación en el proceso de solución analítica del problema. Una vez resuelto el problema analíticamente comprobar el resultado gráficamente con el asistente matemático.

Tareas de aplicación en las cuales se establecen relaciones funcionales

1. Una de las virtudes fundamentales del Álgebra como herramienta matemática es las posibilidades que brinda para el cambio del registro semiótico literal al algebraico particularmente a través de relaciones funcionales, además esta es una de las expresiones

fundamentales del Álgebra como herramienta dentro de la propia Matemática. Aplicación, cambio de RRS.

Tarea: Una fábrica vende sus productos a 20 pesos c/u, pero si el comprador solicita más de 100 unidades, le hacen una rebaja del 3%. Exprese mediante una relación funcional el método de cobro de la fábrica y diga el importe de 80 y 120 unidades respectivamente.

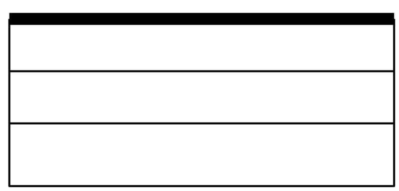
Si se designa el producto por "x" y f(x) su importe entonces la relación funcional es la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 20x \text{ si } 1 \le x \le 100 \\ 20x - 0.6x \text{ si } 100 < x \end{cases}$$

Por lo tanto 80 unidades importan 1600 pesos y 120 importan 2328

Tarea: Un campesino dispone de 600 ms. De alambre para cerca y quiere cercar un campo rectangular y dividirlo por tres cercas paralelas a uno de los extremos. Si el campesino puede usar x ms. De una cerca de piedra como uno de los lados del campo. Exprese el área encerrada en función de x cuando las cercas de división son paralelas a la cerca de piedra.

En este caso además de cambiar del registro semiótico literal al algebraico, es cómodo para el estudiante apoyarse en un registro gráfico como se ilustra:



Evidentemente la semiótica gráfica no expresa la relación funcional del área, pero facilita expresar la misma, ya que materializa las longitudes requeridas y hace evidente escribir: 600 = 3x + 2y, como se quiere expresar el área en función de "x" se despeja y = (600-3x)/2 "objeto algebraico" de donde se obtiene: A = 3x (200 – x)/2

Se va ha hacer una caja abierta de una hoja de hojalata de 20 por 32 pulgadas, cortando cuadrados iguales de x pulgadas en cada esquina y virando los bordes hacia arriba. Exprese el volumen de la caja en función de los lados.

Este ejemplo es para desarrollarlo como el anterior, pasar de la semiótica literal a la analítica pasando por un apoyo gráfico: V = 4x (10 – x) (16 – x)

Tareas de aplicación en nuevos contextos

Para evitar el trabajo reproductivo de los estudiantes y contribuir a la consolidación del nexo símbolo-objeto son importantes los ejercicios donde el estudiante tenga que considerar diferentes alternativas, como es el caso de las ecuaciones modulares.

Resolver las siguientes ecuaciones modulares lineales:

1.$|2x+4|=4$ 2. $\left|\frac{3}{x}-2\right|=1$ 3. $-|x|-\frac{2}{3}=-\frac{3}{2}$

4. $|x+1|+2=2$

Una vez que el estudiante se ha entrenado a considerar diferentes casos con las ecuaciones lineales, estará en condiciones cuando trabaje con las ecuaciones cuadráticas de resolver ecuaciones modulares de 2do grado y ya tiene el entrenamiento necesario para enfrentar el mayor grado de complicaciones que se deriva de estas ecuaciones.

Resolver las siguientes ecuaciones modulares cuadráticas:

1.$|x^2+3x|+x^2=2$ 2. $|2x-x^2-3|=1$ 3. $|x^2-1|+x+1=0$

4. $|x^2-9|+|x^2-4|=5$

De acuerdo al grado de desarrollo de los estudiantes se puede incluir el mismo tipo de problemas pero en sistemas de ecuaciones lineales, como los ejemplos a continuación:

$a)\begin{cases} \left|\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right|=2 \\ 4x+3y=xy \end{cases}$ b) $\begin{cases} |x-1|+(y-2)=3 \\ (x-1)+|y-2|=0 \end{cases}$

el procedimiento es el mismo que para una ecuación pero con mayor grado de generalidad.

Trabajo con desigualdades:

Esta actividad tiene un carácter formativo importante desde el punto de vista conceptual dado que las desigualdades cumplen algunas propiedades de las igualdades pero otras no. lo cual implica mayor dominio conceptual de la ecuación de 2do grado.

Tarea Demostrar que para todo número real positivo se cumple que: $x+\frac{1}{x}\geq 2$

Multiplicar por x implica el dominio de propiedades de las desigualdades y permite obtener: $x^2-2x+1\geq 0$, lo cual es necesario relacionar con las ecuaciones de 2do. Grado y la descomposición factorial para llegar a: $(x-1)^2\geq 0$ lo cual es cierto para todo número real por ser una potencia par. Por último se debe usar la semiótica gráfica para representar $x+\frac{1}{x}-2$ y a partir de ella el estudiante pueda argumentar que se cumple la desigualdad planteada.

Tarea: Sean a y b dos números reales no negativos, probar que: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

Al igual que en el caso anterior usamos: $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$ de donde se obtiene desarrollando la potencia: $\sqrt{a}^2 - 2\sqrt{a}\,\sqrt{b} + \sqrt{b}^2 \geq 0$ donde se requiere el dominio conceptual de la radicación para poder expresar: $\sqrt{a}^2 = a$ y $\sqrt{b}^2 = b$ de donde despejando en la desigualdad llegamos a: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Anexo 12: Encuesta de Valoración del modelo y la metodología propuesta

UNIVERSIDAD APEC

Perfeccionamiento de la formación de conceptos algebraicos en estudiantes universitarios con el empleo de los asistentes matemáticos

Encuesta de Valoración del modelo y la metodología propuesta

Estimado colega:

Ha sido usted seleccionado para colaborar con la investigación "Perfeccionamiento de la formación de conceptos algebraicos en estudiantes universitarios con el empleo de los asistentes matemáticos" que será aplicada como parte de las acciones que la Universidad APEC realiza para perfeccionar la enseñanza de la Matemática.

En tal sentido se ha elaborado esta encuesta, cuyo propósito es la validación cualitativa del modelo y de la concepción de la metodología para el perfeccionamiento conceptual en el Álgebra básica de estudiantes universitarios con el empleo de las TIC.

Les agradecemos su cooperación, respuestas y consideraciones, las cuales permitirán evaluar y perfeccionar el trabajo realizado.

La encuesta se ha dividido en dos momentos:

I. Datos generales del encuestado.
II. Información relacionada con la propuesta presentada.

I. Datos generales del encuestado.

Objetivo: Determinar el nivel de conocimiento de los expertos y su experiencia con relación a la enseñanza del Álgebra

1 Institución de Procedencia

Institución de Educación Superior	
País	
Institución vinculada a la Educación Superior	
País	

2 Años de experiencia en la actividad universitaria

Menos de 5	6 a 10	11 a 15	16 a 20	21 a 25	26 a 30	31 a 35	Más 35

3. Años de experiencia en la enseñanza de la Matemática

Menos de 5	6 a 10	11 a 15	16 a 20	21 a 25	26 a 30	31 a 35	Más 35

4. Categoría científica y docente

Máster	Doctor

Categoría Docente

5. ¿Cómo evalúa la información que posee en relación con la problemática tratada en la investigación?

Muy Adecuada (5)	Bastante Adecuada (4)	Adecuada (3)	Poco Adecuada (2)	No Adecuada (1)

6. ¿Cómo evalúa la influencia de las siguientes fuentes de argumentación en sus criterios?

Fuentes de argumentación	Grado de influencia de las fuentes de argumentación.		
	Alto	Medio	Bajo
Análisis teóricos realizados por usted.			
La experiencia obtenida por usted.			
Trabajos de autores nacionales.			
Trabajos de autores internacionales.			
Su propio conocimiento del estado del problema a nivel internacional.			
Su apreciación personal.			

II. Información relacionada con la metodología propuesta.

En esta sección le mostramos a usted un cuestionario relacionado con el modelo y la metodología para la formación conceptual de estudiantes universitarios en el Álgebra básica con el empleo de las TIC. Teniendo en cuenta que el objetivo de esta consulta es que usted valore la propuesta presentada (modelo y metodología), se le solicita emita la evaluación de sus criterios atendiendo a la siguiente escala.

Muy adecuada	C_1	5 ptos.
Adecuada	C_2	4 ptos.
Poco adecuada	C_3	3 ptos.
Inadecuada	C_4	2 ptos.
Sin opinión	C_5	1 pto.

II.1. ¿Cómo valora la influencia de la materialización con el empleo de las TIC para la consolidación del nexo símbolo-objeto matemático en el perfeccionamiento conceptual?

5	4	3	2	1

II.2. ¿Cómo valora la influencia de la transferencia entre registros semióticos para la generalización en el perfeccionamiento conceptual?

5	4	3	2	1

II.3. ¿Cómo valora la influencia de las relaciones dialécticas objeto-proceso, variable-parámetro y el carácter singular-general del objeto matemáticos en el aprendizaje conceptual del Álgebra?

5	4	3	2	1

II.4. ¿Cómo valora el Modelo semiótico-informático que sustenta la Metodología para la formación de conceptos algebraicos en estudiantes universitarios con el empleo de los asistentes matemáticos?

5	4	3	2	1

II.5. Valore el grado de correspondencia entre el modelo y la metodología.

5	4	3	2	1

II.6. ¿Qué valoración le merece la planificación hecha de los tipos de clases en correspondencia con las fases del proceso?

5	4	3	2	1

II.7. Emita su criterio valorativo acerca de la correspondencia entre los tipos de tareas y las fases del proceso.

5	4	3	2	1

II.8. Indique su valoración general sobre la contribución de la metodología a mejorar la efectividad de los estudiantes universitarios en el empleo del Álgebra como herramienta en aplicaciones matemáticas.

.

5	4	3	2	1

II.9. ¿Tiene usted alguna sugerencia para perfeccionar este trabajo?, si es así, por favor expréselo a continuación.

Muchas gracias por su colaboración.

Anexo 13: Coeficiente de competencia

Tabla: Determinación del coeficiente k para los expertos seleccionados

EXPERTO	Kc	Ka	K	Niveles de competencia
K Experto No 1	1,0	1,0	1,0	Alto
K Experto No 2	0,8	0,96	0,88	Alto
K Experto No 3	1,0	1,0	1	Alto
K Experto No 4	0,4	0,92	0,66	Medio
K Experto No 5	0,8	0,99	0,90	Alto
K Experto No 6	1,0	1,0	1,0	Alto
K Experto No 7	1,0	1,0	1,0	Alto
K Experto No 8	0,8	0,92	0,86	Alto
K Experto No 9	0,8	0,84	0,82	Alto
K Experto No 10	0,6	0,77	0,69	Medio
K Experto No 11	1,0	0,99	1,0	Alto
K Experto No 12	0,6	0,86	0,73	Medio
K Experto No 13	0,6	0,96	0,78	Medio
K Experto No 14	0,4	0,85	0,63	Medio
K Experto No 15	1,0	1,0	1,0	Alto
K Experto No 16	1,0	0,88	0,94	Alto
K Experto No 17	0.8	1	0.9	Alto
K Experto No 18	1	1	1	Alto
K Experto No 19	0.8	1	0.9	Alto
K Experto No 20	0.8	1	0.9	Alto
K Experto No 21	0.8	0.9	0.85	Alto
K Experto No 22	1	1	1	Alto
K Experto No 23	1	1	1	Alto
K Experto No 24	0.6	1	0.8	Alto
K Experto No 25	0.6	1	0.8	Alto
K Experto No 26	0.8	1	0.9	Alto
K Experto No 27	0.8	0.9	0.85	Alto
K Experto No 28	0.8	1	0.9	Alto
K Experto No 29	0.8	1	0.9	Alto
K Experto No 30	0.8	0.9	0.85	Alto

Tabla: Matriz del criterio de expertos por indicadores

	1	2	3	4	5	6	7	8
Experto 1	5	5	5	5	5	5	5	5
Experto 2	5	5	4	4	4	4	4	4
Experto 3	5	5	5	5	5	5	5	5
Experto 4	5	5	5	3	4	5	5	4
Experto 5	5	5	4	4	5	5	5	4
Experto 6	5	5	5	5	5	5	5	5
Experto 7	5	5	5	5	5	5	5	5
Experto 8	5	5	5	5	5	5	5	5
Experto 9	5	4	4	4	5	5	5	5
Experto 10	4	4	4	4	4	5	4	5
Experto 11	5	5	5	5	5	5	5	5
Experto 12	5	4	4	4	5	4	4	4
Experto 13	5	5	4	4	4	5	4	5
Experto 14	4	4	4	5	5	5	5	5
Experto 15	5	5	5	5	5	5	5	5
Experto 16	5	5	4	4	5	5	4	5
Experto 17	5	5	5	5	3	4	4	4
Experto 18	5	4	5	5	4	4	4	5
Experto 19	5	5	4	5	4	4	4	5
Experto 20	4	4	5	4	4	4	4	4
Experto 21	5	5	4	4	5	5	4	5
Experto 22	5	5	5	5	5	5	5	5
Experto 23	5	5	5	5	5	5	5	5
Experto 24	5	5	4	4	5	5	4	5
Experto 25	5	5	5	5	5	5	5	5
Experto 26	5	5	5	5	5	5	5	5
Experto 27	5	5	5	5	4	4	4	4
Experto 28	5	5	5	5	5	5	5	5
Experto 29	5	5	5	5	5	5	5	5
Experto 30	5	5	4	5	5	5	5	5

Anexo 14: Prueba diagnóstica de Álgebra básica

UNIVERSIDAD APEC

Departamento de Matemática.

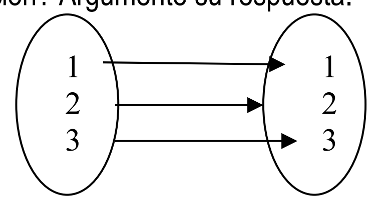
Nombre: ____ Matricula: ________________

I. Seleccione la respuesta correcta en cada caso:

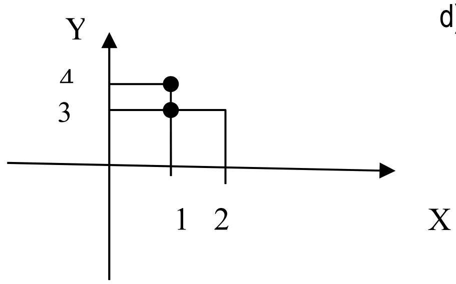
1. ¿Cuál de las siguientes relaciones es una función? Argumente su respuesta.

   a. {(1, 2), (2, 3), (3, 5), (2,6)}

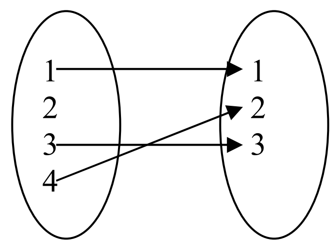
b)



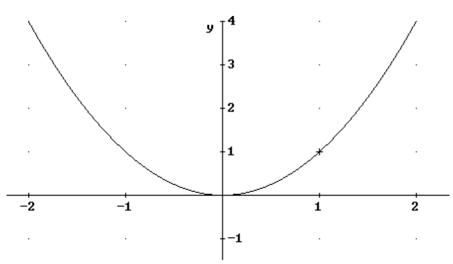
c)



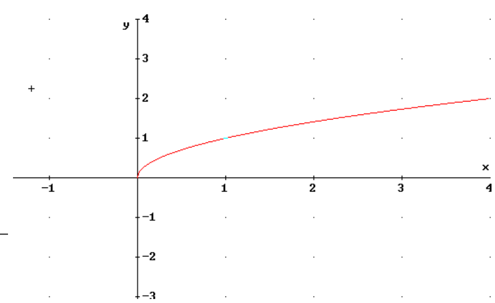
d)



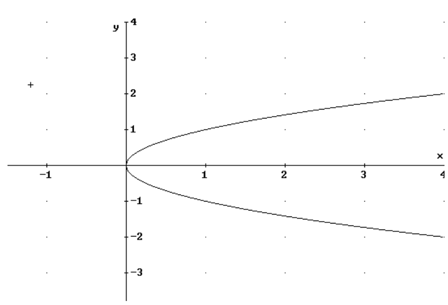
2. De las siguientes gráficas diga cuál no es una función. Argumente su respuesta.



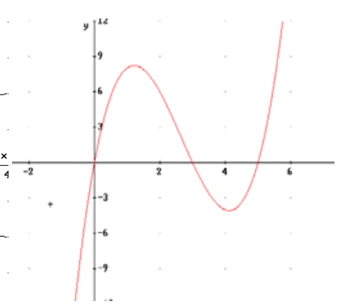
a)



b)



c)



d)

3. Resuelve - 3 + 6ab - 2c, sí a = -1, b = -2 y c = -3.

a) 3 b) 21 c) – 13 d) 18

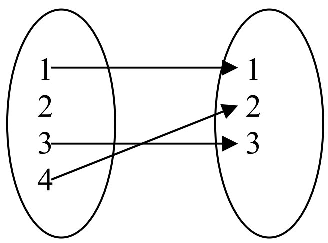
4. Dada la función $y = \sqrt[3]{2x+4}$ su dominio es:

a) Todos los reales b) Todos los reales con x≥-2

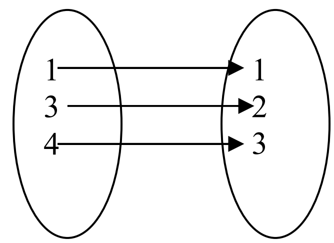
c) Todos los reales con x>-2 d) Todos los reales con x≥ 2

5. Diga de las siguientes relaciones cuál es una función sobreyectiva:

a)

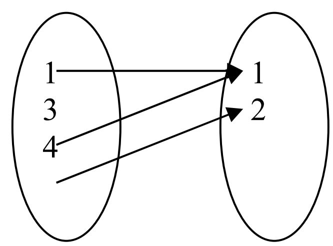


b)



c) {(1,1)(1,2)(1,3)}

d)



6. ¿Cuál de las siguientes funciones es una función lineal?

a) y= 3x+4 b) y= x^3+5 c) y= sin x d) y= x^2+3x+2

7. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones es una ecuación algebraica lineal?

a) 3x+4>6 b) 2x+5=7 c) sin x +5 =6 d) x^2+3x+2=0

8. Al representar $-5 \leq x < 0$ en forma de intervalo se obtiene:

a) (-5,0) b) (-5,0] c) [-5,0] d) [-5,0)

9. Al efectuar la operación con matrices $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ el orden de la matriz resultante se:

a) 3x2 b) 2x3 c) 3x3 d) 2x2

10. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones es una ecuación trascendente?

a) $2^{x} = 8$ b) $\log(x+1) = 4$ c) $x^2 + 4x + 4 = 0$ d) a y b son correctas

II. Responda Verdadero o Falso a las siguientes preguntas y explique su respuesta.

a) Al determinar el dominio de una función que tiene denominador, la solución son todos los números reales con las x diferentes a los valores que hagan cero al denominador.________
b) Una función biyectiva debe cumplir que sea solamente inyectiva. .________
c) La ecuación log 10 + x =4 es una ecuación lineal. _________
d) Las ecuaciones lineales tiene una solo raíz.________
e) La ecuación 2(x-3)=5x-4 tiene de solución x=3 y x=4/5 _________
f) La matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ es una matriz cuadrada _________
g) En la multiplicación de matrices se cumple que A*B= B*A _________
h) La sucesión 2, 4, 6, 8, …… es una progresión geométrica _________
i) X=2 es la única solución de la inecuación $x + 3 \geq 5$ _________

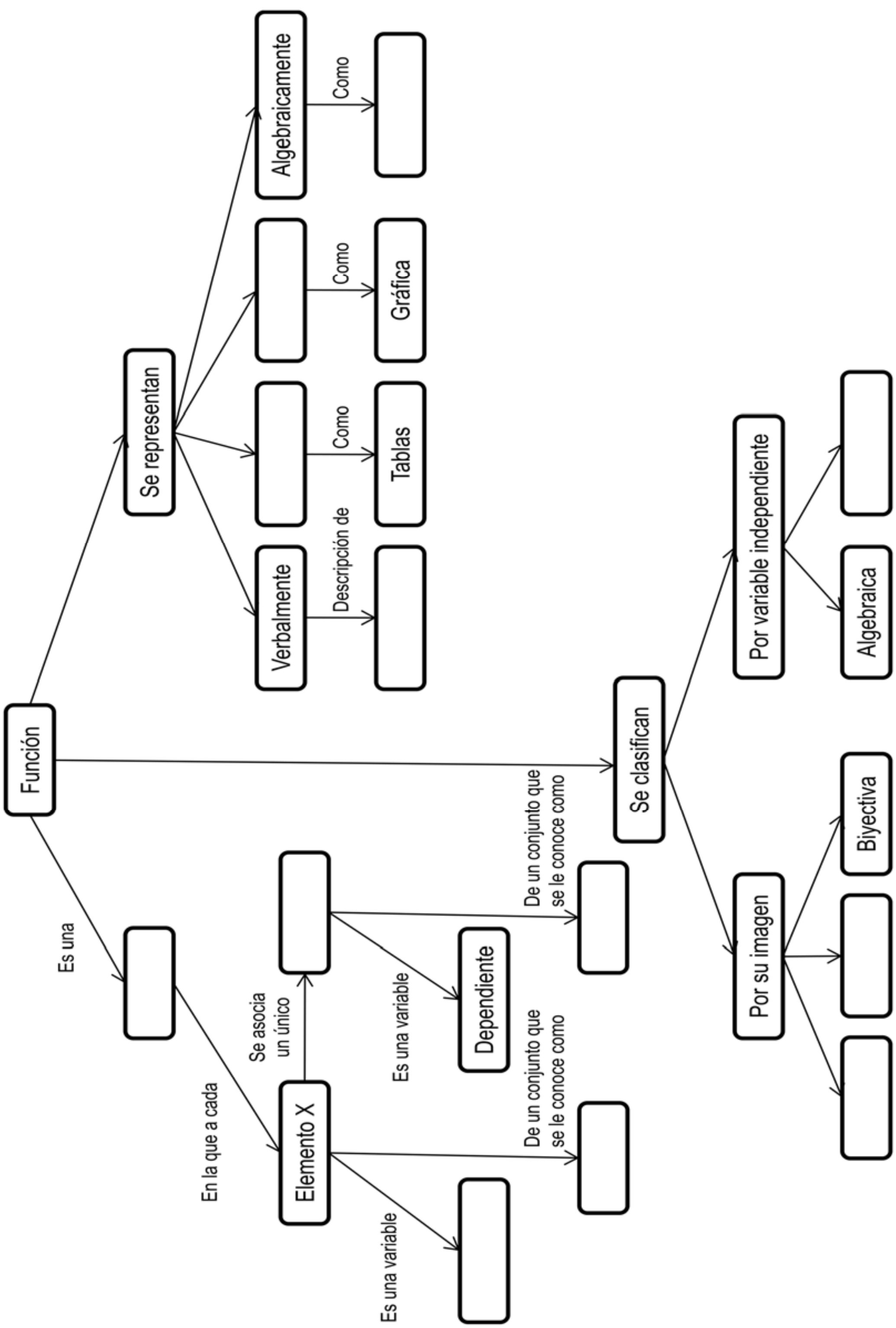
III. Resuelva las siguientes ecuaciones

a) $\sqrt[3]{2x + 4} - 3 = -1$
b) Cuando despejamos h en la ecuación A = 2πr (r + h)

IV. Utilizando el asistente matemático Derive determine el intercepto con el eje x de la función y= 2x+5, tanto analíticamente, como gráficamente e interprete su operación.

Anexo 15: Prueba para evaluar los conceptos sobre el tema de funciones

Completar el siguiente mapa conceptual sobre funciones



Trabajos de la autora relacionados con la investigación.

Publicaciones:

- Monografía “Metodología para la asimilación conceptual del Álgebra Universitaria con el empleo de los asistentes matemáticos”, aceptación para su publicación en la Colección de Investigaciones Educativas de la Universidad APEC, República Dominicana.

- “La reconstrucción de conceptos de Álgebra con el empleo de los asistentes matemáticos”, Ileana Miyar, María de los Ángeles Legañoa Ferrá, Ramón Blanco, Memorias de la IX Conferencia Internacional de Ciencias de la Educación, Camagüey, ISBN 978-959-16 05 65-8.

- “La asimilación conceptual del Álgebra básica con el empleo de los asistentes matemáticos”, Memorias del Encuentro Iberoamericano de Educación Superior a Distancia “La calidad de la educación superior a distancia en el ámbito euro-latinoamericano: perspectivas, políticas y estrategias”, Puerto Plata, República Dominicana, junio 2007

- “La enseñanza del Álgebra básica con el empleo de los asistentes matemáticos”, memorias del 4to Congreso Internacional Tecnologías de la Información y Comunicación, y Educación a Distancia, CITICED 2006, Santo Domingo, República Dominicana, Septiembre del 2006.

Eventos:

- XX Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, RELME (Camagüey, Cuba, Julio 2006),
- XII Encuentro Iberoamericano de la Educación Superior a distancia de la AIESAD. (Puerto Plata, R.D., Julio 2007),
- 2do. Congreso Internacional para la mejora de la enseñanza de la Matemática. UNAPEC (Santo Domingo, R.D., Agosto 2007),
- IX Conferencia Internacional de Ciencias de la Educación (Camagüey, Cuba, Noviembre 2007),
- V Congreso Internacional sobre Tecnología de la Comunicación y la Educación a Distancia, CITICED 2007 (Santo Domingo, R.D., Octubre 2007), y
- 9na. Reunión Dominicana de Matemática Educativa. REDOME 9. (Santiago de los Caballeros, R.D., Febrero 2008).

CITAS Y REFERENCIAS

1. Armendáriz, M. (1993). Didáctica de la Matemática y Psicología. Barcelona.
2. Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7, pp. 245-274.
3. Arzarello, F., & Robutti, O. (2004). Approaching functions through motion experiments. Educ stud in Math, special Issue, to appear.
4. Bartlo, J., Saldanha, l.& Kieran, C.(2007). Attending to structure and form in algebra: challenges in designing CAS-centered instruction that supports construing patterns and relationships among algebraic expressions (Proceedings of the 29th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Stateline (Lake Tahoe), NV: University of Nevada, Reno.
5. Bautista, A. (1994). Las nuevas tecnologías en la capacitación docente. Madrid: Visor/Aprendizaje.
6. Bednarz, N., & Janvier, B. (1996). Emergence and Development of Algebra as a Problem Solving Tool: Continuities and Discontinuities with Arithmetic, in Bednarz y Al. (a cura di) Approaches to Algebra, perpectives for resarch and teaching. Kluver Academic Press.
7. Berger, M. (2005). Vygotsky's theory of concept formation and Mathematics education. In Chick, H. L. y Vicent, J.L. (Eds.). Proceeding of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2). pp. 153-160 Melbourne: PME.
8. Berger, M. (1998). Graphic calculators: An interpretative framework. For the Learning of Mathematics, 18(2), pp. 13-20.
9. Berry, J., Graham, E., & Watkins, A. (1994). Integrating the Derive program into the teaching of mathematics. The International Derive Journal, 1(1) , pp. 83-96.
10. Blanco, R. (2007). La Generalización Teórica como proceso Fundamental del Pensamiento.Newsletter # 327. Retrieved from http://www.monografias.com/trabajos47/generalizacion-teórica/generalizacion-teórica.shtml.
11. Blanco, R. (2006). Presupuestos de Vigotsky y la formación de conceptos. Retrieved from http://www.monografias.com/trabajos58/presupuesto'vigotsky/ presupuesto'vigotsky/.
12. Blanco, R. (1999). La abstracción y el nexo símbolo objeto. Revista reforma siglo XXI. Universidad Autónoma de Nuevo León. Monterrey, México: (#20).
13. Bortolotti, E. (1950). Storia della Matematica Elementare. (Vols. lll, parte 2). (eds.). In L. Berzolari.
14. Boubée, C., Delorenzi, O., & Sastre, P. (2006). Significado personal del objeto matemático, función: Diagnóstico sobre articulación entre registros de representación. Argentina: 1ra Reunión Pampeana de Educación Matemática I REPEM, Santa Rosa, la Pampa, agosto.
15. Borda, M., & Villareal, M. (2006). Humans-with-media and the reorganization of Mathematical Thinking. New York: Springer.
16. Brousseau, G. (1983). Les Obstacles epistemologiques et les problemes en Matematiques. Reserches en Didactique des Mathématiques, 4(2), pp. 165-180.

17. Brown, R. (1998). Using computer algebra systems to introduce algebra. The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education, 5, pp. 147-160.
18. Buchberger, B. (1990). Should students learn integration rules? Sigsam Bulletin, 24(1), pp. 10-17.
19. Burrill, G., (2002). Handheld graphing technology in secondary mathematics:research findings and implications for classroom practice.
20. Cabo, F., Llamazares, B., & Peña, M. (2001). Derive: Una herramienta para el aprendizaje de las matemáticas. Valladolid, España: Universidad de Valladolid, departamento de Economía Aplicada (Matemática).
21. Cedillo, T. (1995). Introducción al Álgebra mediante su uso: una alternativa factible mediante calculadoras programable. (Vol. 7). México: Publicado en Educación Matemática, Grupo Editorial Iberoamericana.
22. Chiappini, G., & Reggiani, M. (2003). Toward a didactical practice based onmathematics laboratory activities, Proceedings of Cerme 3 (Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education), Bellaria, Italy, 28 febbraio-3 marz 2003. Retrieved from http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/.
23. Colin, J., & Rojano, T. (1991). Bombelli, la sincopación del álgebra y la resolución de ecuaciones. L'educazione matematica, XII (2) pp. 125-161.
24. Coll, C. (1987). Constructivismo e interacción educativa. ¿Cómo enseñar lo que se ha de construir? . Madrid: Ponencia en el congreso Internacional de Psicología y Educación. Intervención educativa.noviembre 1991.
25. D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. In: Radford L., D'Amore B. Cinvestav, México DF., México: Semiotics, Culture and Mathematical Thinking. Numero speciale della rivista RELIME.
26. D'Amore, B. (2001). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. Revista de Didáctica de la Matemática , Uno, 27, pp. 51-76.
27. Dario, R., Montero, Y., & Pedrosa, M. (2007). Informática y Educación Matemática en Latinoamérica: Un panorama. Argentina: Universidad Nacional de Mendel Plana Argentina, VII Congreso Iberoamericano de Informática Educativa.
28. Davidov, V. (1982). Tipos de generalización en la enseñanza. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.
29. Davis, R. (1984). Learning Mathematics: The cognitive science approach to mathematics education. Norwood, NJ Ablex.
30. Delgado, J. (2006). Generando ejercicios con un asistente matemático. La Habana, Cuba: Instituto Superior Politécnico: José A. Echevarría.
31. Delgado, J., & Válido, I. (2006). La enseñanza-aprendizaje del álgebra con ayuda de un asistente matemático. La Habana, Cuba: Instituto Superior Politécnico: José A. Echevarría.
32. Doerr, H. (2001). Learning algebra with technology: The affordances and constraints of two environments. In H. Chick, K. Stacey, Ji. Vincent & Jo. Vincent (Vol. 1). Melbourne: (Eds.) Proceedings of the 12th ICMI study conference the future of the teaching and learning of algebra: The University of Melbourne.

33. Drijvers, P. (2003). Learning algebra in a computer algebra enviroment. CD-B Press, Center for science and Mathematics education .
34. Drijvers, P. (2000). Students encountering obstacles using a CAS. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5(3) , pp. 189-209.
35. Drouhard, J. (2001). Research in language aspects of algebra: A turning point?. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent. Australia: (eds.) Proceedings of the 12th ICMI Study Conference on the Future of the Teaching and Learning of Algebra, The Univesity of Melbourne.
36. Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In David O. Tall. Advanced Mathematical Thinking, Kluwer: Dordrecht.
37. Dubinsky, E., & Noss, R. (1996). Some kinds of computers for some kinds of Mathematical learning. Mathematical Intelligencer, 18(1), pp. 17-20.
38. Duval, R. (1998). Signe et objet (I). Trois grandes etapes dans la problematique des rapports entre representations et objet. Annales de didactique et de science cognitives 6 , pp. 139-163.
39. Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. México: (eds.), Investigaciones en Matemática Educativa II, Grupo Editorial Iberoamérica.
40. Duval, R. (1988). Gráficas y Ecuaciones. Antología en Educación Matemática. Cambray, R.; Sánchez, E.; Zubieta, G. (eds.) DME, Cinvestav-IPN. pp. 125-139.
41. Feliz, G. (1998). Memorias del departamento de matemáticas. Santo Domingo, República Dominicana. Junio.
42. Fernández, L. (2008). Conversatorio con estudiantes de Columbia secondary School for Math. 26 de Septiembre del 2008, Universidad de Columbia, New York, USA. Retrieved from www.diariodigital.com.do/artículo.33400.html.
43. Galán, J., Galán, M., Padilla, & Rodríguez, P. (2002a). Are computers under-used in Mathematical teaching for engineers? Educational technology. Serie Sociedad de la información nº 9, pp. 220-225.
44. Galán, J., Galán, M. A., Padilla, & Rodríguez, P. (2002b). Use of the computer in Mathematic teaching for engineers. A powerful calculator? Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level). Hersonissos, Creta. Grecia.
45. García, A., García, F., Hoya, S., Rodríguez, G., & Villa, A. (2002). Differential calculus of several variables with Mathematica or Maple. Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level). Hersonissos, Creta. Grecia.
46. García, L. (2006). Modelo para el desarrollo de la habilidad de resolución de problemas a través del cálculo integral en FIME, basado en los niveles de complejidad del nexo símbolo objeto. Tesis Doctoral. Mexico.
47. Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. Recherches en Didactiques des Mathematiques, 22 (2/3): pp. 237-284.
48. Godino, J., & Batanero, C. (1999). Una aproximación semiótica y antropológica a la investigación en didáctica de las matemáticas.

49. Godino, J., & Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En, A. Sierpinska y J. Kilpatrick, (eds.), Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity, Dordrecht: Kluwer, A. P.
50. Godino, J., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. España. The International Journal on Mathematics Education,* Vol. 39 (1-2): pp.127-135.
51. González, F. (2005). Algunas cuestiones básicas acerca de la enseñanza de conceptos matemáticos. Fundamentos en Humanidades Universidad Nacional de San Luis, Año VI (No.l), pp. 37-80, Venezuela.
52. González, M., Amo, E., & García, E. (2006). Sistemas de Computación Algebráicos. Evolución y aplicaciones. España: Departamento: Economía y Empresa (Area de Matemática), Universidad de Castilla-La Mancha.
53. González, M. (2007). El constructivismo en la evaluación de los aprendizajes del Álgebra lineal. Venezuela. Retrieved from www.scielo.org.ve/scielo.php.
54. Graham, A., & Thomas, M. (1999). A graphic calculator approach to algebra. Mathematics Teacher, 167 , pp. 34-37.
55. Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J., & Whitenack, J. (2000). Symbolising, modeling, and instructional design. In P. Cobb, E. Yackel & K. McClain, (eds.). USA: Symbolising and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. pp. 225-273.
56. Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. Journal for Research in Mathematics Education , 26, 2, pp. 115–141.
57. Gray, E., & Tall, D. (1991). Duality, Ambiguity and Flexibility in Successful Mathematical Thinking. In Fulvia Furinghetti (Vol. 2). Assisi, Italy: Proceedings of PME XIII, pp. 72-74.
58. Greeno, J. (1983). Conceptual Entities. In Dedre Gentner, Albert L. Stevens. Hillsdale, NJ, USA: (Eds.), Mental Models, Lawrence Erlbaum Associates.
59. Guzmán, J., & Kieran, C. (2002). The role of calculators in instrumental genesis: The case of Nicolás and factors and divisor. PME International conference, 3, pp. 41-48. In A.D. Cockburn & E. Nardi (eds.), Proccedings of the 26 th.
60. Guzmán, M. (1984). Panorama de la matemática. Una enciclopedia bajo el título Avances del Saber, Tomo 5, dedicada a la ciencia, técnica y cultura. Labor .
61. Hegedus, S., & Kaput, J. (2004). An introduction to the profound potential of connected algebra activities: issues of representation, engagement and pedagogy. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. vol.3, pp. 129-136. Bergen, Norway: Program Committee.
62. Heid, M.K., Blume, G.W., Flanagan, K., Iseri, L. & Kerr, K. (1999). The impact of CAS on non-routine problem-solving by college mathematics students. International Journal onComputer Algebra in Mathematics Education, 5(4), pp. 217-249.
63. Heid, M. (1988). Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. Journal for Research in Mathematics Education 19, pp. 3-25.

64. Hernandez, P. (2000). Enseñando valores socioafectivos en un scenario constructivista. Bienestar subjetivo e inteligente intrapersonal. En J. Beltrán y otros. Intervención psicopedagógica y curricular escolar. Madrid: Pirámide, pp. 217-254.
65. Hernández, S. (2000). Experiencias adquiridas durante el desarrollo de la práctica: Laboratorio de Álgebra. México: Centro de ciencia de Sinaloa. redxperimental.gob.mx/descargar.php.
66. Hillel, J., Lee, L., Laborde, C., & Linchevski, L. (1992). Basic functions through the lens of computer algebra systems. Journal of Mathematical Behavior, 11, pp. 119-158.
67. Hitt, F. (1996). Investigaciones en Matemática Educativa I. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
68. Hitt, F. (1996). Sistemas Semióticos de Representación del Concepto de Función y su Relación con Problemas Epistemológicos y Didácticos. Revista de Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamérica .
69. Hoya, S., Martín, A., Rodríguez, G., & Visus, I. (2002). The use of symbolic calculus software in the teaching of Mathematics at Engineering Schools. Proceedings of the International Conference on ICT's in Education. Badajoz, España.
70. Kaput, J. (2000). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 441664).
71. Kieran C.,(2007): Interpreting and Assessing the Answers Given by the CAS Expert: A Reaction Paper in The International Journal for Technology in Mathematics Education, 14(2), 103-108
72. Kieran, C., & Saldanha, L. (2005). Computer algebra systems (CAD) as tool for coaxing the emergence of reasoning about equivalence of algebraic expressions. Proceedings of the 29 th conference of the International Group for the Psychology of mathematics educations Melbourne, vol.3, Australia, pp. 193-200.
73. Kindt, M. (2000). The inheritance of al-Khwarizmi. Leusden, Netherlands: NVvW.: In F. Goffreee, M. van Hoorn & B. Zwaneveld, (eds.), One hundred years of mathematics education pp. 57-70.
74. Kline, M. (1991). Historia del pensamiento matematico, I-II, Einaudi, Torino. New York : Mathematical thought from ancient to modern times, Oxford University press.
75. Landa, J. (2001). Introducción a la hoja de cálculo a partir de la noción de función. Memorias IX Seminario Nacional de Microcomputadoras en la Educación matemática. Universidad Autónoma de Chapingo, México. Retrieved from www.fismat.unich.mx/mateduca/carlos/mem9sem.
76. López, L. (2006). Metodología para el perfeccionamiento del proceso Enseñanza aprendizaje del cálculo vectorial, fundamentada en el desarrollo de la Visualización matemática tridimensional. Tesis Doctoral Mexico.
77. Macintyre, T., & Forbes, I. (2002). Algebraic skills and CAS - Could assessment sabotage thepotential? International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education. 9, pp. 29.
78. Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee, Approaches to algebra, perspectives for research and teaching. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, pp. 65-86.
79. Mazur, E., et al. (2002). Peer Instruction: Results from a Range of Classrooms,Phys. Teach., 40,

pp. 206-209.

80. Menchinskaya, N. (1969). The psychology of mathematics concepts: fundamentals problems and methods of research (Vol. I). California: En: Kilpatrick y Wirszup (eds.), Soviets studies in the psychology of learning and teaching mathematics Stanford, School Mathematics Study Group, (publicación del NCTM).
81. Miyar, I. (2005). Metodología para la asimilación conceptual del Álgebra Universitaria con el empleo de los asistentes matemáticos. Tesis en opción al título académico de Máster en Ciencias de la Educación. Camagüey, Cuba.
82. Nava, J. (1998). Experiencia en el uso de programas computacionales para enseñar Matemáticas en Ingeniería en la UNITEC. Retrieved from http://dcb.fi-c.unam.mx/foro/memorias/dieciocho.pdf.
83. O'Callaghan, B. (1998). Computer-intensive algebra and students' conceptual knowledge of functions. Journal for Research in Mathematics Education , 29, pp. 21-40.
84. Ortega, P. (2002). La enseñanza del Álgebra Lineal mediante sistemas informáticos de cálculo algebraico. Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid . Madrid, España.
85. Otte, M. (2003). Does mathematics have objects? In what sense? Synthese. 134 (1-2): pp. 181-216.
86. Papini, M. (2003). Algunas explicaciones vigotskiana para los primeros aprendizajes del Álgebra. RELIME Vol. 6, 1 de Marzo del 2003, pp. 41-47. Retrieved from dialnet.uniroja.es/servlet/fichero_artículo.
87. Pea, R. (1987). Cognitive technologies for mathematics education. NJ: In A. Schoenfeld (ed.), Cognitive science and mathematics education. Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates.
88. Pegg, J., & Davey, G. (1998). A synthesis of Two Models:Interpreting Student Understanding in Geometry. New Jersey: In R. Lehrer & C. Chazan, (eds.), Designing Learning Environmentsfor Developing Understanding of Geometry and Spac. Lawrence Erlbaum.
89. Pérez, O. (2007). La evaluación del aprendizaje en la Educación Superior. Editorial La Escalera. Primera Edición. ISBN: 978-9945-430-04-2. Santo Domingo. República Dominicana.
90. Pimienta, J. (2003). Matemáticas IV: Enfoque constructivista. España. Pearson. Retrieved from www.gandhi.com.mx/index.cfm/id/Producto/dept/libros.
91. Polluelo, A. (2001). El futuro de la enseñanza y aprendizaje del Álgebra. Documento de la Discusión para el Estudio de ICMI 12, México.
92. Pozzi, S. (1994). Algebraic reasoning and CAS: Freeing students form syntax? In H. Heugl &B. Kutzler, Derive in education: Opportunities and strategies. Bromley,UK: Chartwell-Bratt.
93. Protti, O. (1999). La historia de las matemáticas como instrumento pedagógico. Costa Rica. http://www.cimm.ucr.ac.cr/aruiz/Libros/Uniciencia/Articulo/Volmen2/Parte10/articulo19.html. consultado 5 de Junio del 2007.
94. Puig, L. (1994). Semiótica y matemáticas (Vol. 51). Valencia, España: Eutopías 2a. época. Centro de Semiótica y teoría del espectáculo de la Universitat de València & Asociación Vasca de Semiótica.
95. Radford, L. (2006). Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático: Introducción. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa , Vol. 9 (Nº. 1).

96. Radford, L. (2004a). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. Mathematical Thinking And Learning. Lawrence Erlbaum Associates. 5(1), pp. 37–70.

97. Radford, L. (2004b). The sensual and the conceptual: artifact-mediated kinesthetic actions and semiotic activity. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4 , pp. 73–80.

98. Radford, L. (2003). Gestures, speech and the sprouting of signs. Mathematical thinking and learning. 5, 1, pp. 37-70.

99. Radford, L. (2001). On the relevance of Semiotics in Mathematics Education. Semiotics and Mathematics Education at the 25th PME International Conference The Netherlands, University of Utrecht, July, pp. 12-17. Netherlands.

100. Radford, L. (2000). Signs and meanings in students emergent algebraic thinking: A semiotic analysis, Educational Studies in Mathematics 42: pp. 237-268.

101. Radford, L. (1998). On Culture and Mind, a post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought, paper presented at the 23rd Annual Meeting of the Semiotic Society of America. Victoria College, University of Toronto, Octubre 15-18.

102. Repo, S. (1994). Understanding and reflective abstraction: learning the concept of the derivative in the computer environment. The International DERIVE Journal 1(1) , pp. 97-114.

103. Rojano, T. (1996). Developing Algebraic Aspects of Problem Solving Within a Spreadsheet Environment. en Bednarz, N.; Lee, L. y Kieran, C. (eds.) Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching, Londres, Boston, Kluwer Academic Publishers.

104. Rubinstein, S. (1966). El proceso del pensamiento.La Habana.Cuba: Editorial Universitaria.

105. Santandreu, M. (2005). Recursos TIC en la enseñanza y aprendizaje del área de matemática. Retrieved from www.comunicacionypedagogia.com/publi/infcup/muestra/pdf/santandreu.

106. SEEC. (2008). Informe sobre las políticas nacionales de Educación. República Dominicana - ISBN-978-92-64-04411-OCDE. Retrieved from www.oecdbookshop.org/oecd/display.asp.

107. Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin, Educational Studies in Mathematics, 22, pp. 1-36.

108. Steinbring, H. (2005). What Makes a Sign a Mathematical Sign? An Epistemological Perspective on Mathematical Interaction. Germany: University of Dortmund.

109. Tall, D., & Gray, E. (2001). Abstraction as a Natural Process of Mental Compression. Mathematics Education Research Centre. University of Warwick, Coventry, CV4 7 AL. UK .

110. Toranzos, F. (1959). Enseñanza de la Matemática. Buenos Aires, Argentina: Editorial Kapelusz.

111. Torre, C., & Martín, L. (2006). Utilización de Asistentes Matemáticos en la Enseñanza de las Matemáticas. España: Departamento: Economía y Empresa, Universidad de Castilla-La Mancha.

112. UNESCO (1998). Primer Estudio Internacional del Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación, Primer Informe, Santiago, Chile.

113. UNESCO. (2007). Informe de UNESCO: Educación para todos en 2015 acanzaremos la meta?, elaborado por el equipo de seguimiento de la educacion para todos de la UNESCO. Síntesis con

énfasis en A.L. y Argentina, elaborado por el IIPE. Buenos Aires, Argentina: UNESCO Sede Regional, 29 de nov. del 2007.

114. Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In: Coxford, A.F. The ideas of algebra, K-12 (1988 Yearbook of the NCTM), Reston, VA: NCTM pp. 8-19.

115. Van Amerom, B. (2002). Reinvention of early Algebra-Develomental research on the transition from arithmetic to algebra, Utrecht, Cd-b press.

116. Vázquez, R. (1998). La resolución de problema y tareas docentes de Matemática IV para Ingeniería Eléctrica. Tesis de doctorado. Cuba.

117. Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. N.J.: In Carpenter, T., Moser, J. & Romberg, T. Addition and subtraction. A cognitive perspective. Hillsdale, Lawrence Erlbaum. pp. 39-59.

118. Vergnaud, G. (1982). Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education, For the Learning of Mathematics. 32, pp. 31-41.

119. Vigotsky, L. (1986). Thought and Language. In Kozulin, A.

120. Vigotsky, L. (1978). La mente en la sociedad: el desarrollo de las fun Massachusetts, London, England: The MIT Press, Cambridge. Nociones psicológicas superiores. Harvard University Press, Cambride.

121. Yordi, I. (2004). La habilidad del cálculo de procesos en la solución de tareas docentes de la asignatura Álgebra Lineal. Tesis en opción al título de Doctor en Investigación Educativa . La Habana, Cuba: ICCP.